Philosophy of Science, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol. 13, No. 2, Autumn and Winter 2023-2024, 57-82
https://www.doi.org/10.30465/ps.2024.47559.1705

The problem of applicability of mathematics in natural sciences

Ali Seyedi*

Abstract

The wide application of mathematics in science raises the challenge of why and how mathematics is so effective and applicable in natural sciences. The explanation of this problem, especially after Wigner's famous article entitled "Unreasonable Effectiveness of Mathematics", has fascinated many scientists and philosophers of science. In this article, we examine different recent approaches to this issue. In addition, we show how metaphysical assumptions and different understandings of mathematics and physics have been involved in the formulation of this problem and the answers given to it. This review can help to a deeper understanding of the problem.

Keywords: effectiveness of mathematics in science, applicability of mathematics, relationship between physics and mathematics, Eugene Wigner.

* Phd student of Philosophy of Science, Research Institute of Human Sciences and Cultural Studies, asdehaghani@gmail.com

Date received: 16/02/2023, Date of acceptance: 14/05/2023

فلسفهٔ علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ پژوهشی)، سال ۱۳، شمارهٔ ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۲

مسئلهٔ کاربردپذیری ریاضیات در علوم طبیعی

علی سیدی دهاقانی*

چکیده

کاربرد گسترده‌ی ریاضیات در علوم، این چالش را مطرح می‌کند که چرا و چگونه ریاضیات تا بدین حد در علوم طبیعی موثر و کاربردپذیر است. توضیح این مسئله به ویژه پس از مقاله معروف ویگنر تحت عنوانِ «اثربخشی نامعقول ریاضیات»، بسیاری از دانشمندان و فلاسفهٔ علم را مجذوب خود کرده است. در این مقاله رویکَردهای مختلفِ اخیر به این مسئله را بررسی می‌نماییم. به علاوه، نشان می‌دهیم که چگونه پیش‌فرض‌های متافیزیکی و تلقی‌های متفاوت از ریاضیات و فیزیک در صورت بندی این مسئله و پاسخهایی که به آن داده شده دخالت داشته است. این بررسی می‌تواند تا حدی به فهم عمیق‌ترِ مسئله کمک کند.

کلیدواژه‌ها: اثربخشیِ ریاضیات در علوم، کاربردپذیریِ ریاضیات، ارتباطِ فیزیک و ریاضیات، یوجین ویگنر.

۱. مقدمه

آلبرت اینشتین در سالِ ۱۹۲۱ در سخنرانی اش در آکادمیِ علومِ پروس در برلین، این سؤال را مطرح می‌کند: «چرا ریاضیات به شکل تحسین‌برانگیزی برای توصیف واقعیت مناسب است؟ ... در تمام اعصار، این معما ذهن‌های پرسشگر را به تأمل واداشته است» (Bonheure et al., 2019). یوجین ویگنر (Eugene P. Wigner) فیزیکدانِ مجاری-آمریکایی(۱۹۰۲-۱۹۹۵) و برندهٔ نوبل فیزیک ۱۹۶۳، در مقاله‌ای با عنوانِ " اثربخشیِ نامعقول ریاضیات در علوم طبیعی" (The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences) بخش‌هایی از

* دانشجوی دکتری، فلسفهٔ علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، asdehaghani@gmail.com
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۰۸، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۰۵

ریاضیات را مانند "حساب دیفرانسیل و انتگرال" مولودِ نیازهای فیزیک می‌داند، ولی بخش‌های دیگری از ریاضیات مثلِ "ماتریسها" و یا "اعدادِ مختلط" را که برای پاسخگویی به مشکلاتِ درونیِ ریاضیات ایجاد شده‌اند و به ناگهان کاربردِ وسیعی در صورت‌بندیِ ماتریسی از مکانیکِ کوانتومی پیدا کرده‌اند، شگفت‌آور می‌داند. اثربخشیِ این بخش از ریاضیات در فیزیک، ویگنر را به تعجب واداشته است و کاربردپذیریِ آن در فیزیک را امری نامعقول و چیزی شبیه معجزه می‌داند (Wigner, 1960).

پس از انتشار این مقاله، مسئلهٔ کاربردپذیری ریاضیات، مورد توجه دوباره واقع گردید و از آن زمان تاکنون ادبیاتِ فلسفیِ زیادی پیرامونِ این موضوع شکل گرفته است. دانشمندان و فلاسفهٔ زیادی تلاش نموده‌اند که این مسئله را صورتبندی کنند و به آن پاسخِ مناسبی بدهند (Steiner,1995;Colyvan,2001;Baker,2011;Ye,2010;Lützen,2011;Islami,2016;…..). هدفِ مقاله حاضر این است که از رهگذر مرور این تلاش‌ها نشان دهد مسئلهٔ کاربردپذیری صورت‌بندیِ واحدی ندارد و به همین دلیل منجر به پاسخ‌های متعددی نیز شده است. به علاوه، استدلال می‌کنیم که این صورت‌بندی‌های متفاوت، ناشی از پیش فرضهایِ فلسفی و نگرشهایِ متفاوتی است که نسبت به ریاضیات و فیزیک وجود دارد.

ساختار این مقاله بدین شرح است: بخش دوم به بیان صورت‌بندی اولیهٔ مسئله که توسط خود ویگنر در مقالهٔ سال ۱۹۶۰ ارایه شده است می‌پردازد و پس از آن قالبهایِ فلسفیِ صورت‌بندیِ مسئله آمده است. در بخش سوم به بررسی مشارکتهایِ شاخصِ در این زمینه می‌پردازد. بخش چهارم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲. اثربخشیِ ریاضیات در علوم طبیعی به مثابهٔ امری نامعقول

ویگنر در مقالهٔ تأثیرگذاری که در سال ۱۹۶۰ نوشت، کاربردپذیریِ ریاضیات در علوم طبیعی را شگفت‌آور خواند، چیزی که نمی‌توان توضیح معقولی برای آن ارایه کرد. به نظر او، ریاضیات علم عملیات ماهرانه(Skillful Operations) با مفاهیم و قواعدی است که فقط برای کاربرد در خودِ ریاضیات ابداع شده‌اند. به نظر ویگنر، هر چند بیشترِ مفاهیم پیشرفتهٔ ریاضی، مانند اعداد مختلط، جبر، عملگرهای خطی، مجموعه‌های بورل (Borel Sets) و... مفاهیم و ابزارهایِ مناسبی است که ریاضیدان می‌تواند در آنها نبوغ و حس زیبایی‌شناختیِ صوریِ خود را نشان دهد، اما به نظر نمی‌رسد که چیزی در تجربه متناظر با موجوداتی از قبیلِ اعداد مختلط و توابع تحلیلی (Analytic functions)وجود داشته باشد (Wigner, 1960, pp. 3-4).

او سپس فیزیک را علمی تعریف می‌کند که به دنبال کشفِ قاعده‌مندیهای طبیعت است که خودِ این قاعده‌مندیها ناشی از اصول ناوردا هستند. او نحوهٔ احتمالی استفاده فیزیکدان از ریاضیات برای تدوین قوانین طبیعت را غیرمسئولانه (Irresponsible) تعبیر می‌کند. به عبارتی فیزیکدان از مشاهدهٔ شباهتِ روابطی بین دو کمیت با روابطی در ریاضیات نتیجه می‌گیرد که این رابطه همان رابطه‌ای است که در ریاضیات است. اما چنین استنتاجیصرفاً به این دلیل است او هیچ رابطهٔ مشابه دیگری را نمی‌شناسد. نکته مهمی که به نظر ویگنر باید به آن توجه کرد، این است که این تشبیهِ خام فیزیکدان، در تعداد عجیبی از موارد منجر به توصیف دقیق و شگفت‌آورِ دسته بزرگی از پدیده‌ها می‌شود و به نظر ویگنر، این امر نشان می‌دهد که زبان ریاضی به معنای واقعی، زبان صحیحی است. ویگنر برایِ نشان دادنِ منظورش، چند نمونه ذکر می‌کند (Wigner, 1960, pp. 7-9).

اولین نمونه، فرمولِ جاذبهٔ نیوتن است که تنها با اتکا به شواهد اندکی پیشنهاد شد. در این فرمول ریاضی از مشتقِ دوم استفاده شده است که تنها برای کسی که با ریاضیات آشنایی داشته باشد قابل درک است (Wigner, 1960, pp. 9-10). مثال دوم را از مکانیک کوانتومی ذکر می‌کند، آنجا که ماکس بورن (Max Born) متوجه شد برخی از قوانین محاسباتی ارائه شده توسط هایزنبرگ (Werner Heisenberg) از نظر صوری با قوانین محاسباتیِ ماتریس‌ها یکسان است. سپس بورن، جردن (Pascual Jordan) و هایزنبرگ پیشنهاد کردند که موقعیت و تکانه معادلات مکانیک کلاسیک با ماتریس‌ها جایگزین شوند. آنها قوانین مکانیک ماتریسی را برای چند مسئله بسیار ایده‌آل به کار بردند و نتایج کاملاً رضایت‌بخش بود. ولی استدلال محکمی دال بر اینکه مکانیک ماتریسی آنها در شرایط واقعی تر منجر به نتایج درست شود، وجود نداشت. اولین تلاش برای به کارگیری مکانیک آنها دریک مسئله واقعی (اتم هیدروژن) چندین ماه بعد توسط پائولی (Wolfgang Ernst Pauli) صورت گرفت و نتیجه رضایت‌بخش بود. این موفقیت قابل درک بود، زیرا در محاسباتِ هایزنبرگ از نظریه قدیمی اتم هیدروژن هم استفاده شده بود. اما زمانی که مکانیک ماتریسی برای اتم هلیوم یا اتم‌های سنگین‌تر که نمی‌شد قواعد هایزنبرگ[1] را برایشان اعمال کرد، بکار برده شد، بطور ناباورانه‌ای محاسبات با داده‌های تجربی موافقت داشت (Wigner, 1960, pp. 10-11).در مثالِ سوم، ویگنر به این نکته اشاره می‌کند که برخی از نتایج بدست آمده از نظریهٔ میدان کوانتومیِ آنچنان با تجربه همخوانی دارند که جزء دقیقترین نتایج در فیزیک به حساب می آیند. نمونهٔ آن انتقالِ لمب[2] در اتم هیدروژن است که نتایج تجربی تا ۱۱ رقم معنی‌دار با نظریه همخوانی داشته‌اند. نظریهٔ انتقالِ لمب، نظریه‌ای در

الکترودینامیک کوانتومی است که با محاسباتِ ریاضی مبتنی بر آنالیز برداری بـه محاسـبهٔ انـرژی پتانسیل الکترون می‌پردازد و انـدازه‌گیریهـای آزمایشـگاهی بـه طـور شـگفت‌آوری نتـایج ایـن محاسبات را تایید می‌نماید (Wigner, 1960, p. 12). بررسیِ مثال‌های ویگنر نشان می‌دهـد کـه از نظر او ریاضیات و فیزیک دو دیسیپلینِ مجزا هستند. ریاضیات از نظرِ او علمِ عملیاتِ ماهرانه بـا مفاهیم و قواعدی است که ریاضیدان بطور دلبخواه و اختیاری آنها را وضـع مـی‌کنـد. فرآینـدی صوری است کـه در آن، ریاضـیدان تـوجهی بـه طبیعـت نـدارد و صـرفاً معیارهـایِ زیبـایی و سازگاری مورد نظر اوست.[۳] از طرفی فیزیکدان در علم فیزیک به دنبالِ کشفِ قـوانین و اصـولِ ناوردایِ جهان است. در این راه او دایماً با آزمایش و تجربـه، از طبیعـت بـازخورد مـی‌گیـرد و تلاش می‌کند که نظراتش را اصلاح نماید. لذا از دیـدِ او مـا بـا دو دیسـیپلینِ متفـاوت سـروکار داریم. بنابراین می‌توان تلقی ویگنر از مسئلهٔ کاربردپذیری را به این شکل صورت‌بندی کـرد کـه چگونه ریاضیاتی که ریاضیدان بدون توجه به طبیعت و صرفاً بـا معیارهـایی ماننـد سـازگاری و زیبایی خلق می‌کند، تا این اندازه در علومِ طبیعی که قرار است توصیف و تبیینی بـرای طبیعـت ارایه کنند، موثر است؟ به نظر او این چیزی شبیه به معجزه است.

با اینکه مسئلهٔ کاربردپذیری معمولاً به نام ویگنر شناخته مـی‌شـود، ولـی بـا بررسـی ادبیـات موجود به نظر می‌رسد که صورت‌بندی‌هـای متنـوعی از ایـن مسـئله وجـود دارد کـه لزومـاً بـا صورت‌بندی ویگنر یکسان نیست.

مـارک اشـتاینر(Mark Steiner) رویکردهـای مختلـف بـه ایـن مسـئله را در چهـار دسـته تقسیم‌بندی نموده است: رویکرد سمانتیکی، رویکـرد متـافیزیکی، رویکـرد توصـیفی، ورویکـرد معرفتی (Steiner, 1995). در ادامه اجمالاً به معرفی هر کدام می‌پردازیم:

۱.۲ رویکرد سمانتیکی

مسئلهٔ سمانتیکیِ کاربردپذیریِ ریاضیات این است که در علومِ طبیعی با گـزاره‌هـایی سـر و کـار داریم که ترکیبـی از واژگـان(Terms) ریاضـی و غیرریاضـی هسـتند و ایـن گـزاره‌هـا منجـر بـه پیش‌بینی‌های تجربی صادقی دربارهٔ طبیعت می‌شوند. اما اگر واژگانِ ریاضی معنای ثابتی نداشـته باشند و نتوان صدقِ آنها را احراز کرد، چگونه این جملاتِ نامشخص منجـر بـه نتـایج تجربـی صادقی می‌شوند؟ پس باید دنبالِ این باشیم که چگونه می‌تـوان بـرایِ عبـاراتِ ریاضـیاتی (مـثلاً اعداد) معنایِ ثابتی در نظر گرفت؟ گوتلوب فرگه(Gottlob Frege) با اعتقاد به اینکـه اعـداد مـا را به اشیاء واقعیِ ریاضی(در یک جهانِ شبه افلاطونی) ارجاع می‌دهند، ادعا کرد که ایـن مشـکل را

حل کرده است (Frege, 1988). در واقع وجودِ همین موجوداتِ ریاضی عاملِ صدق ساز برای عباراتِ ریاضی در جملاتِ علمی می‌شوند و دیگر جای تعجب نخواهد بود که از جملاتِ صادق، نتایجِ صادق حاصل شود. بنابراین قضایایِ ریاضیاتی محض و یا قضایایِ ترکیبی هر دو درست هستند و در اتکای ما به ریاضیات برای پیش‌بینی‌هایِ تجربی رازی وجود ندارد؛ چون آنچه از واقعیت، و با استدلالهای منطقی حاصل می‌شود، نیز صادق است. فرگه بدین ترتیب مسئلهٔ سمانتیکی (صادق بودن قضایایِ ریاضی) کاربردِ حساب را حل کرد (Frege, 1988). اما اگر ما وجود اعداد و مجموعه ها را قبول نداشته باشیم، نیاز داریم توضیح دهیم که چگونه این مقدماتِ نامشخص بطور سیستماتیک منجر به نتایجِ صادق می‌شوند (Steiner, 1995, pp. 4-10).

۲.۲ صورت‌بندیِ متافیزیکی

حتی اگر مانند فرگه با فرضِ وجودِ اشیاء ریاضی در یک جهانِ افلاطونی یا شبه افلاطونی موافق باشیم، هنوز یک مشکل باقی می‌ماند. چگونه اشیاء ریاضی این شکافِ موجود بینِ دو جهان افلاطونی و جهان فیزیکی را طِی میکنند و در جهانِ فیزیکی موثر می افتند؟ این شکافِ متافیزیکی چگونه پُر می‌شود؟

پاسخِ فرگه این است که اشیاء ریاضی در جهانِ فیزیکی تاثیر نمی‌گذارند بلکه در مفاهیمی که ما برایِ تبیینِ جهان استفاده می‌کنیم موثرند (Frege, 1988). او قوانینِ حساب را از نوعِ قوانینِ مرتبهٔ دوم میدانست که حاکم بر همهٔ مفاهیم‌اند. در نگاه او موجوداتِ ریاضی بطور مستقیم با جهان فیزیکی ارتباط ندارند بلکه آنها با مفاهیمی مرتبط‌اند که برخی از آنها برای اشیاء فیزیکی بکار می‌روند. یعنی اینکه قوانینِ اعداد برای اشیاء فیزیکی کاربردپذیر نیستند، آنها برای احکامی که در مورد جهان فیزیکی برقرارهستند بکار می‌روند: آنها قوانینِ قوانینِ طبیعت هستند. مثلاً اگر ما نظریهٔ مجموعه ها را پایهٔ ریاضیات بدانیم، این نظریه، به این دلیل کاربردپذیر است که اشیاء فیزیکی عضوهایِ این مجموعه ها هستند. به این ترتیب، دیگر هیچ رازآلودگی در اینجا وجود ندارد. برای کاربردپذیری تنها به رابطهٔ بین یک شیء(Object) فیزیکی و یک شیء ریاضی نیاز داریم، که با تشخیص عضویت شیء فیزیکی در یک مجموعه قابل احراز است (Steiner, 1995, pp. 10-13).

۳.۲ رویکرد توصیفی

برای درک رویکرد توصیفی به کاربردپذیری می‌توان با این مقدمه شروع کرد که کاربردِ ریاضیات در فیزیک معمولاً به دو بخشِ "معقول" و "رازآلود" تقسیم می‌شود. مثلاً کاربردپذیری و سودمندیِ عملِ جمع و عملِ ضرب، چیزِ غیرمنتظره و عجیبی نیست و می‌توان آنها را ناشی از همان الگوهایِ قدیمیِ "جمع آوری و مرتب سازی"(Gathering & Arranging) تلقی کرد که در زندگیِ ما جاری بوده است. ویژگیِ خطی بودن(Linearity) نیز مشابه اصلِ برهم‌نهی (Superposition) گالیله است. هنگامی که مجموعه ای از عللِ متفاوت، در سیستمی عمل میکنند، تحولِ آن سیستم، مجموعِ اثراتِ ناشی از هر یک از آن علتها به تنهائی است. اشتاینر این نمونه‌ها را کاربردهایِ معقولِ ریاضیات در فیزیک می‌داند (Steiner, 1995, pp. 13-15). اما مواردی وجود دارد که به نظر می‌رسد توضیحِ معقولی برای آن‌ها وجود ندارد. مثلاً انتظار داریم که توضیحی برای این امر وجود داشته باشد که چرا قانون عکس مجذور فاصله در قوانین گرانش نیوتن، قانون کولن، شدت نور و... کاربرد دارد. همچنین درمکانیک سیالات، مبنایِ کار، معادلهٔ کوشی–ریمان است که با توابعِ تحلیلی(توابعِ دیفرانسیل‌پذیر با یک متغیر مختلط) سر و کار دارد. با استفاده از خواصِ صوریِ این تابع، تمامِ ویژگیهایِ سیال را میتوانیم به دست آوریم. اما هیچ توضیحِ شناخته شده‌ای برایِ اینکه چطور این توابع با متغیر مختلط می‌توانند خصوصیات سیال را بخوبی توصیف کنند، وجود ندارد (Steiner, 1995, p. 16).

به عنوان نمونهٔ دیگر، درمکانیک کوانتومی هر بردار واحد منفرد در فضای هیلبرت وضعیت و اطلاعات ویژگیهایِ فیزیکی سیستم را مشخص می‌کند. اما چون ما میخواهیم که تمامیِ خواصِ فیزیکی توسط یک بردار در یک فضای هیلبرت ثبت گردد (اصل حداکثری (maximality principle)[۴]، برای هر ویژگیِ فیزیکی، مجموعهٔ مختصاتِ متفاوتی را در همان فضا و به همان بردارِ واحد مرتبط میکنیم. اصلِ حداکثری که با هیچ ایدهٔ فیزیکی مطابقت ندارد، منجر به دوگانهٔ موج–ذره و اصل عدم قطعیتِ هایزنبرگ می‌شود. و شگفت‌آور اینکه اگر بخواهیم اطلاعاتی از بردار حالت سیستم در مورد اندازه حرکت زاویه‌ای استخراج کنیم، ضروری است که اندازه حرکت زاویه‌ای کوانتیزه باشد. بنظر می‌رسد که فرمالیسم فضای هیلبرت با طبیعت مطابقت دارد و نقش آن عمیقتر از توصیف یک مفهوم است (Steiner, 1995, p. 20). مثال دیگر، کاربردِ نظریهٔ گروه در فیزیک است. گروه su_3 را که شامل ماتریسهای مختلط سه بعدی است که هیچ تبدیل فضازمانی با آنها مطابقت ندارد، ریاضیدانان برای طبقه‌بندیِ گروه‌هایِ پیوسته توسعه دادند. اما بعداً در تئوریِ کوراکها و دسته‌بندی هادرونها بکار رفت و کاربردِ آن بسیار

فراتر از انتظارِ ما بوده است (Steiner, 1995, pp. 23-24). در موارد اینچنینی مسئلهٔ توصیفیِ کاربردپذیری این است که چرا موجودات و سیستم‌های ریاضی که بمنظورِ خاصی ایجاد شده‌اند، در توصیفِ موجوداتِ فیزیکی این‌قدر موفق عمل می‌کنند؟

۴.۲ رویکرد معرفتی

اگر ریاضیات و علوم طبیعی را دو معرفتِ مجزاً با دو دیسیپلینِ متفاوت بدانیم، سؤال معرفتی این است که چگونه عناصرِ معرفتِ ریاضی در سایرِ معارفِ علمیِ ما موثر و کاربردپذیر هستند؟ چگونه ریاضیدانی که به هنگامِ خلقِ سیستمِ ریاضیاتیِ خود، توجهّی به طبیعت ندارد و به هنرمند نزدیکتر است تا به کاشف، موفق به خلقِ چیزی می‌شود که بعداً به طورِ اتفاقی وغیرمنتظره در معرفتِ طبیعی ما کاربردی معجزه‌آسا پیدا می‌کند؟ به نظر می‌رسد صورت‌بندیِ خودِ ویگنر از مسئلهٔ کاربردپذیری یک صورت‌بندیِ معرفتی و نگاهِ او به ریاضیات، نگاهی فرمالیستی است.

۵.۲ ضرورت ریاضیات

نگاه دیگری نیز وجود دارد که بر اساسِ آن، تنها زمانی که ریاضیات را برایِ فیزیک ضروری بدانیم و از آن برایِ تبیین در فیزیک استفاده کنیم سوالی رازگونه و فلسفی مطرح می‌شود. با چنین ایده‌ای، آلن بیکِر (Alan Baker) معتقد است برخی از نسخه‌هایِ مسئلهٔ کاربردپذیری اصلاً مسئله نیستند و تنها آنجا که ریاضی را برایِ فیزیک ضروری و تبیین‌کننده بدانیم، مسئلهٔ واقعی ظاهر می‌شود و این مسئله را شاید تنها بتوان با نگاهِ واقعگرایانه پاسخ گفت(Baker, 2011):

از جمله کسانی که بر ضرورت ریاضیات در فیزیک تاکید می‌کنند، می‌توان به افرادِ ذیل اشاره نمود: مارک بالاگر(Mark Balaguer) ریاضیات را برای فیزیک ضروری می‌بینند (Balaguer, 2001). مارک کولیوان نیز در کتابش[۵] ریاضیات را برایِ فیزیک کاملاً ضروری دانسته و علومِ طبیعیِ بدونِ ریاضیات را بی مفهوم می‌داند (Colyvan, 2001). سورین بانگو(Sorin Bangu) در کتابِ منتشرِ شده‌اش در ۲۰۱۲[۶] با تاکید بر طبیت‌گرایی و کل‌گراییِ کواینی، بر خلافِ اشتاینر، نه تنها کاربرد ریاضیات در علوم طبیعی را انسان محور و معارضِ با طبیعت‌گرایی نمی‌داند بلکه آن را ضروری و اجتناب ناپذیر می‌بیند (Bangu, 2012).

۳. رویکردهایِ گوناگون در پاسخ به مسئله

پس از مرور صورت‌بندی‌ها و تلقی‌هـای مختلـف از مسـئله کاربردپـذیری، اکنـون بـه بررسـی پاسخ‌هایی می‌پردازیم که به ایـن مسـئله داده شـده اسـت. فلاسـفهٔ علـم بـا پـیش فـرض‌هـا و رویکردهایِ متفاوتی به مسئله ورود کرده و تلاش نموده‌اند که پاسـخی بـرایِ آن بیابنـد. برخـی این مسئله را بی‌اهمیت وپیش‌پاافتاده و برخی آن را مهم و اساسیدانسته‌اند. عده ای نیز تنها جنبـهٔ ضروری و متافیزیکیِ کاربردِ ریاضـیات در علـوم را مشـکل‌سـاز برشـمرده‌انـد. در ایـن بخـش تعدادی از پاسخها و نقدهایِ وارده به آنها را می آوریم.

۱.۳ ریاضیات و فیزیکِ انسان‌محور

اشتاینر در کتابِ "کاربردپذیری ریاضیات به مثابهٔ یک مسئلهٔ فلسـفی"[۷] ریاضـیاتِ معاصـر را بـا توجه به ماهیتش، انسان‌محور (Anthropocentric) می‌داند. او معتقد اسـت کـه بـرایِ فیثاغورثیـان ریاضیات فقط شاملِ حساب و هندسه و برهان بود. اما امروزه ریاضیدانان از دو معیـار" زیبـایی و مناسب‌بودن (یا سهولت)"(Beauty & Convenience) برای تصمیم گیـری در مـورد اینکـه یـک ساختار را به عنوان ساختار ریاضی مطالعه کنند یا خیر، استفاده می‌کنند. این دو معیـار، مفـاهیمی انسان‌محور یا "مختص به گونهٔ زیستی"[۸] هستند(Steiner, 1998, pp. 5-7).

در پایان قرنِ نوزدهم مشکلِ فیزیکدانان این بود که چگونه می‌توان قوانینِ دنیایِ بسـیار ریـز را نوشت؟ آنها این راه حلِ ناامیدکننده را یافتند: "بایـد معـادلاتی شـبیه بـه معـادلاتِ کلاسـیک بیابیم". اما تشابه یا تفاوت، تنها در چهارچوبِ یک طرح و با داشتنِ معیـاری بـرایِ طبقـه بنـدی معنا پیدا می‌کند. استراتژیِ آنها این بود که قوانینی بنویسیم که شکلِ آنهـا از نظـر ریاضـی مشـابه قوانین کلاسیک باشد. ریاضیات، زبان و طرح هایِ طبقه‌بندی را در اختیارشان قـرار داد و نهایتـاً منجر به کشف موفقیت آمیز مکانیک کوانتومی گردید. اما استفاده از ریاضیات بـرایِ "شـباهت و قیاس"(Similarity & Analogy) انسان محـور و مبتنـی بـر معیارهـای پذیرفتـه شـدهٔ " زیبـایی و مناسب‌بودن (یا سهولت)" است(Steiner, 1998, pp. 48-75).

بنابراین از نگاهِ او تکیه بر ریاضیات در حدس زدنِ قوانین طبیعت، تکیه بر معیارهایِ انسـانی است. گویی از نظرِ فکری ما به دنبالِ جهانی کاربرپسند(User Friendly) هسـتیم. از نگـاهِ اشـتاینر انسان‌ها جایگاه ویژه‌ای در جهان دارند. به این معنا که یکی از محصـولاتِ اصـلیِ ذهـن انسـان (ریاضیات)، به نحوی ویژگیهایِ عمیقِ "لفظی/ساختاری" (Nomic/Structural) جهانِ فیزیکـی را ردیابی می‌کند. در واقع ریاضیاتْ واسطهٔ یک مکاتبهٔ سطحِ بالا بین ذهن انسان و کیهـان اسـت و

بدین جهت است که ریاضیات بر توسعهٔ فیزیک تاثیر می‌گذارد (Bangu,2012, pp.110-132). یعنی فیزیکدانها با باورهای انسان‌محورانهٔ ریاضی عمل می‌کنند و از طرفِ مقابل بنظر می‌رسد که جهان برای تحقیقاتِ انسان‌محور، قابلِ دسترسی است. از این منظر، مسئله تبدیل می‌شود به کاربردِ معیارهایِ انسان‌محور در خصوصِ جهانی که به این معیارها پاسخ میدهد. امّا جهان چه لزومی دارد که به این معیارها پاسخ بدهد؟ از طرفی ظاهراً در اینجا ما باید به دو مشکل پاسخ دهیم: ۱– پدیده‌هایِ طبیعیِ فراوانی که هنوز توصیفِ ریاضیِ مناسب پیدا نکرده‌اند. ۲– مفاهیم ریاضیاتی که هرگز کاربردی نیافته‌اند.

مایکل لیستون به انتقاد از اشتاینر پرداخته و تنها دلیل استفاده دانشمندان از ریاضیات را در سابقهٔ موفقیت‌های گذشته آن می‌بیند، نه به دلیل تعهد آنان به هر گونه جنبه انسان‌محورانه. او به عنوان مثال به اظهارات فیزیکدانان کوانتومی مانند ریچارد فاینمن اشاره می‌کند که اغلب به نقش الهام‌بخش تکنیک‌هایی که پیشینیانشان استفاده کرده‌اند، اعتراف کرده‌اند (Liston, 2000). پیتر سیمونز نیز با توجه به ناامیدی فیزیکدانان در کشف قوانین دنیای میکروسکوپیک، به استفاده آنان از مقایسه‌های فیزیکی بی‌معنا و دستکاری‌های فرمال به عنوان تنها راهبرد برای کشف چیزهایی که به نظر غیرقابل کشف می‌آیند، اشاره کرده و این را یک روش کاملاً منطقی می‌پندارد . از نظر او، رفتار فیزیکدانان لزوماً نشان‌دهنده تعهدات انسان‌محورانه آنان نیست، بلکه نمایانگر این است که ظاهراً آنها راه حلِ ممکنِ دیگری نداشته‌اند (Simons, 2001).

۲.۳ تقارن و ناوردائی قوانین طبیعت

دیدگاهِ دیگری وجود دارد دایر بر اینکه ویگنر علاوه بر طرحِ مسئله، جوابی نیز برایِ آن عنوان کرده است. اسلامی در مقاله‌اش[۹] عنوان می‌کند ویگنر نقشِ اساسیِ تقارنها و اصولِ ناوردا (Invariance Principles) را در شکل‌گیریِ فیزیک گوشزد کرده و نشان می‌دهد این ناوردائیها هستند که ما را قادر می‌سازند قوانینِ فیزیک را بطورِ ریاضی صورتبندی کنیم[۱۰]. در واقع بدونِ این ناوردائیِ قوانین، داشتنِ فیزیک ناممکن است. این اصولِ ناوردا، ساختارِ قوانینِ طبیعت را مشخص می‌کنند. به تعبیریِ دیگر اینها قوانینِ حاکم بر قوانینِ طبیعت‌اند. اینِ تقارنها هستند که به قوانینِ طبیعت، جهان‌شمولی(Universality) می‌دهند و همین ویژگی است که صورتبندیِ ریاضیِ آنها را ممکن می‌سازد. چون ریاضیات به مطالعهٔ کلی و صوریِ روابطِ بینِ اشیاء می‌پردازد. اگر قوانینِ طبیعت این ساختارِ ناوردا را نداشتند، ریاضیات سودمندی و کاربردِ خودش را از دست می‌داد و دیگر زبانِ مناسبی برایِ فیزیک نبود. اکنون هم هیچ تضمینی وجود

ندارد که در آینده ریاضیات بتواند همین نقش را در علوم طبیعی بازی کند (Islami,2016, pp.13-16).

اسلامی معتقد است ویگنر سؤالِ متافیزیکیِ ارتباطِ ریاضیات با جهان را به یک سؤالِ معرفتی، یعنی ارتباطِ ریاضیات با فیزیک تبدیل کرده است. ویگنر جهانِ ما را یک شیء ریاضی نمی‌داند. اصلاً لزومی هم ندارد تمامِ مطالعاتِ ما از جهان صورتبندیِ ریاضی داشته باشد و بسیار خطرناک است که ریاضیات را راهنمای حقیقت بدانیم(Islami, 2016, p. 10).

۳.۳ دو دیسیپلین با وابستگی تاریخی

جسپر لوتزن (Jesper Lützen) با نگاهی متفاوت نشان داده که چگونه فیزیک از دورانِ باستان تا قرنِ بیستم بر توسعهٔ ریاضیات تاثیر داشته است. ریاضیات و فیزیک در ارتباطی دو طرفه بوده‌اند که این ارتباط موجبِ گسترشِ هر دو شده است. با این نگاه، شاید اثربخشیِ ریاضیات در فیزیک، دیگر امری نامعقول جلوه نکند(Lützen, 2011, pp. 8-13).

لوتزن گوشزد نموده که رویکرد ویگنر به مسئلهٔ کاربردپذیری تحت تأثیر نگرش فرمالیستی او به ریاضیات است. نگرشی که در حدودِ سال ۱۹۶۰ به اوجِ خود رسیده بود. دراین سنت که اغلب به هیلبرت نسبت داده می‌شود، ریاضیات شبیهِ یک بازی دانسته می‌شود که در آن قوانین و نحوهٔ بازی را ریاضیدان اختراع می‌کند. سوالاتِ هستی شناختی و معرفت‌شناختی دربارهٔ ماهیتِ ریاضیات کنار گذاشته می‌شود و دیگر سؤال از ماهیتِ اشیاء ریاضی بی‌معنا می‌شود چون آنها نشانه‌هائی دلبخواه هستند. سؤال از صدقِ بدیهیاتِ ریاضی نیز بی‌معنا می‌شود زیرا آنها تنها نقطه‌هایِ شروعِ دلبخواه ما هستند (Lützen, 2011, pp. 2-4).

همانطور که در بخش ۲ اشاره شد ویگنر نیز چنین نگرشی به ریاضیات داشت. او بیشترِ مفاهیم پیشرفتهٔ ریاضی مانندِ اعداد مختلط و توابع تحلیلی را زائیدهٔ نبوغِ ریاضیدان و حسِ زیبایی‌شناختی‌اش می‌دید. این نگاه آشکارا رویکردی فرمالیستی به ریاضیات است و با این وصف قابلِ درک است که چرا او کاربردپذیریِ ریاضیات در فیزیک را شبیهِ معجزه می‌پنداشت.

۴.۳ رویکرد پدیدارشناختی و علوم شناختی

این انسان است که ریاضیات را می‌سازد و از آن بهره میگیرد، بنابراین یک ایده این است که برای توضیح مسئلهٔ کاربردپذیری ببینیم که در مغز او چه اتفاقاتی می‌افتد. چنین ایده‌ای منجر به ورودِ علوم شناختی به مسئلهٔ کاربردپذیری شده است. به نظر فِنگ یی(Feng Ye) مغز انسان در پدیدهٔ ادراک، الگوهائی را از قبل دارد و الگوهائی را هم می‌سازد تا بتواند در مورد اطلاعاتِ ورودی از حواس نتیجه‌گیری نماید. الگوهایِ ریاضی هم الگوهائی هستند که مغز از آنها بهره می‌برد تا بتواند در مورد اطلاعاتِ رسیده از پدیده‌ها گمانه بزند. بنابراین یک پاسخ به مسئلهٔ کاربردپذیری ریاضیات می‌تواند این باشد که چون ریاضیات شاملِ یک سری داستان‌هایِ منسجم است که در برخی موارد توانسته پدیده‌هایِ عالم را برایِ ما بازنمائی کند، مغز الگوهایِ آن را حفظ می‌کند. البته هیچ تضمینی نیست و اگر در آینده این الگوها نتوانند از عهدهٔ پیشگوییِ درست برآیند، مغز الگوهایِ دیگری را جایگزین می‌کند (Ye, 2010, pp. 2-6).

از زمانِ انتشار مقالهٔ ویگنر پیشرفتهایِ زیادی در علوم اعصاب و به ویژه در فهمِ بهترِ ادراک در مغز، حاصل شده است. رولاند اومنِس(Roland Omnès) شروعِ این تغییرات را از ادراک بصری می‌داند. شبکیه شامل حدود ۱۴۰ میلیون گیرندهٔ نوری و شبکه‌ای از نورونهای به هم پیوسته است که اطلاعاتِ خود را از طریقِ عصب نوری به قشر مغز می‌فرستند و تمام اطلاعاتی را که مغز میتواند در مورد تصویر دریافت کند در اختیارش قرار می‌دهند. در واقع مقدار اطلاعات در شبکیه برای انتقال بسیار زیاد است و باید برای انتقال نظمی ایجاد شود و این امر با همزمانی اتفاق می‌افتد. دسته‌هائی از نورونها سیگنالهای خود را بطور همزمان تنظیم می‌کنند و به مغز می‌فرستند. این عملِ همزمانِ نورونها پیامدِ فوری بر بازنمائیِ ما از واقعیت دارد. این آشکارا یادآور بینش کانت از زمان به عنوانِ «شکلِ نابِ شهود» است. گروه‌هایِ مختلفی از نورونها که با هم کار می‌کنند در نواحیِ دایره‌ای شکلی از شبکیه پراکنده‌اند و تصویرِ قابلِ دسترسی در این مناطق پخش می‌شود و این بر شهودِ ما از فضا نیز تاثیر میگذارد (Omnès, 2011, pp. 3-5). مغز اطلاعات وارده را با الگوهایی که در حافظه دارد(الگوهایی از تجارب گذشته و یا حتی الگوهایی که خودش ساخته) مقایسه می‌کند و سپس یک حدس می‌زند که این اساسی‌ترین و معمول‌ترین فرآیندِ مغزی است. آزمایشهای زیادی تایید می‌کنند که آگاهی نقشِ منحصربه فردی در ادراک دارد(به عنوان نمونه آزمایشِ تصاویر دوگانه که ما با آگاهی و زدنِ یک کلیدِ گشتالتی قادریم آن را چیز دیگری ببینیم). با بررسیِ سیستم ادراکی و نقشِ مغز در مقایسهٔ اطلاعاتِ ورودی با الگوهایِ ذخیره شده، میتوان گفت که ریاضیات با

ساختنِ سیستمهای سازگار، در واقع همان الگوها را برای مقایسه در اختیار مغـز قـرار مـی‌دهـد. یعنی پس از مشاهدهٔ پدیده‌های طبیعت توسط فیزیکدان، مغـزِ اوآنهـا را بـا الگوهـای ریاضـیاتیِ موجود در خودش مقایسه نموده و آن پدیده را مطابق با الگویی تشخیص میدهـد و یـا حـدس میزند که بیشترین شباهت را داشته باشد و بتواند دقیقترین نتایج را حاصل نماید.

۵.۳ تقدمِ ریاضیات بر شناخت

یک پاسخِ متفاوت به مسئلهٔ کاربردپذیریِ ریاضیات این است که در یـک انقـلابِ کوپرنیکی(بـه تعبیر کانت) گویی این جهانِ پدیداری است که مخلوقِ طرحِ ریاضیاتیِ عقلانی و یا تـابعِ تـار و پودِ دستگاه شناختیِ ماست و برایِ درک شدن توسطِ انسان، با این الگوهایِ ریاضیاتی انطبـاق و همخوانی پیدا کرده و قابلِ پیش‌بینی می‌شود.

ایمانوئل کانت ویژگی اصلیِ علمِ پس از گالیله را پیشینی بودنِ آن، یعنی تعلق آن بـه عقـل و اندیشه می‌دانست که از آنجا به طبیعت سرایت می‌کند. او در بندِ BXIII کتابِ نقدِ عقـلِ محـض می‌گوید:

> عقل فقط آن چیزی را می‌بیند که بر طبقِ طرحِ خود خلـق مـی‌کنـد. عقـل طبیعـت را وادار می‌کند تا به پرسشهایِ او پاسخ گوید نه اینکه فقط به وسیلهٔ طبیعت بـه ایـن سـو و آن سـو کشیده شود، چون مشاهداتِ تصادفی که بر طبقِ هیچ نقشهٔ از پیش طراحـی شـده‌ای انجـام نگرفته‌اند، به هیچ روی در یک قانونِ ضروری به هم مرتبط نمـی‌شـوند. یـادگیری عقـل از طبیعت به مثابه یادگیری یک قاضی است که شاهدها را ملزم می‌سـازد تـا بـه پرسشـهای او پاسخ گویند. فیزیک باید بر طبق آنچه عقل، خـود در طبیعـت نهـاده اسـت، آنچیـزی را در طبیعت بجوید که خرد در بارهٔ آن نمی‌تواند از خود فراگیرد (طالب زاده, تابستان ۱۳۸۴)

مارتین هایدگر، ویژگیِ اصلیِ علم جدید را متِمتیکال(Mathematical)[11] بـودنِ آن مـی‌دانـد[12] (Heidegger, 1977). متمتیکال طرحی از شیئیت است که عرصه‌ای می‌گشاید تا اشـیاء خـود را در آن نشان دهند و شناختی که در این طرح اخذ و وضع می‌شود، بگونه‌ای است که بنیـادِ اشـیاء را از پیش معین می‌کند. او قانونِ اول نیوتن را مثال می‌زند. این قانون تعریفی از شیء ارائه مـی‌کنـد که به طریقِ تجربی از آن شیء استخراج نشده است ولی پایهٔ هر تعریفی از اشیاء قرار مـی‌گیـرد. هایدگر متمتیکال بودن را اساسی‌ترین حیثِ ماتقدم در شناختِ اشیاء می‌داند. از نظرِ او به همـین دلیل است که افلاطون بر سردرِ آکادمی نوشته بود: "کسی که ریاضیات(هندسـه) نمـی‌دانـد وارد نشود" (طالب زاده, تابستان ۱۳۸۴).

۶.۳ تلقی سنت‌گرایان از جایگاه ریاضیات در علم جدید

اگر تلقی ما این باشد که بنیانِ علومِ جدید بر کمیت و عدد است و با توجـه بـه اینکـه قواعـد و اصولِ محاسبهٔ اعداد در علمِ حساب متجلی گردیده‌اند، شاید بتوان نتیجه گرفت کـه اگـر قواعـدِ حساب را به درستی بکار گیریم، میتوانیم قواعد و اصولِ جوهری(جوهر ثانی) عالم را به دسـت آورده و یا پیش‌بینی کنیم. از این منظر حداقل کاربرد علمِ حساب در علومِ طبیعی، امـری بـدیهی و ضروری بنظر می‌رسد و هیچ رازآلودگی و شگفتی در آن وجود ندارد.

رنه گنون(René Guénon) بعنوانِ یک سنت‌گرا معتقد است:

> «کمیت و کیفیت» را میتوان از نخستین دوگانه هایِ جهـانِ هسـتی دانسـت. ایـن دوگانـه را «ذات و جوهر» و یا «صورت و ماده» نیـز گفتـه‌انـد. ذاتِ یـا صـورت، مجموعـهٔ صـفات و کیفیاتِ یک موجود و حقیقتِ شمارش ناپذیر و مستقل از کمیت آن است. اما جـوهر را بـه دو قِسمِ اول و ثانی تقسیم کرده‌اند. جـوهرِ اول(هیـولیِ ارسـطو) قـوهٔ محـض و غیـر قابـلِ شناخت است، اما جوهرِثانی همان «مادهٔ» فیزیکدانان و قابلِ شناختِ علمی اسـت. بـه قـولِ توماس آکویناس، جوهرِ ثانی با کمیت مشخص شده و عـدد از ایـن جـوهر ناشـی میشـودِ (گنون, ۱۳۶۵).

گنون کمیت و عدد را شرطِ اساسیِ علمِ جدید می‌داند:

> کمیت به عنوانِ مقومِ جنبهٔ جوهریِ عالمِ ما، شرطِ پایه‌ای و اساسـیِ علـمِ جدیـد را تشـکیل داده و مشخصهٔ اساسیِ آن، عدد است. کمیت آن چیزی است که موجبِ فردیتِ موجـودات می‌شود. یعنی آن تعینی است کـه بـه نـوع افـزوده میشـود تـا افـرادِ آن نـوع متعـین شـوند (گنون, ۱۳۶۵).

۷.۳ رویکرد ساختارگرایان

ساختارگرایی ریاضی دیدگاهی فلسفی نسبت به ریاضیات است که ریاضیات را علمی مـی‌دانـد که به جای اشیاء و خصوصیات آنها، به ساختارها و روابط آنهـا مـی‌پـردازد (Reck & Schiemer, 2019). در ساختارگرایی ریاضی تمرکز بر ساختارهای انتزاعیِ ریاضی مانند مجموعه‌ها، گروه‌هـا و فضاهای توپولوژیک بوده و هدفِ ساختارگرایان بررسی مفـاهیم و قواعـد بنیـادی ریاضـیات بدون وابستگی به واقعیت خارجی است. ساختارگرایی علمی نیز یـک رویکـرد در فلسـفه علـم است که بر اهمیت ساختارها در نظریه‌های علمی تأکید می‌کند، نه بر عناصر یا موجودات منفـرد

درون آن ساختارها. ساختارگرایانِ علمی به جایِ تمرکز بر اشیاء مجـزا، اسـتدلال مـی کننـد کـه روابط و تعاملات بین عناصر، کلیدی برای درک پدیده های علمی هستند (Culler, 1998).

مایکل رزنیک (Michael David Resnik) و استوارت شاپیرو(Stewart Shapiro) که از پیشـگامانِ ساختارگرائی در فلسفهٔ ریاضی هستند باور دارند که موضوعِ اصلی در ریاضیات، اشیایِ خـاص نیستند، بلکه ساختارهائی‌اند که اشیاء درونِ آنها جای می‌گیرند. اشیاء ریاضی صرفا مکانهـائی در این ساختارند که خارج از ایـن سـاختار هـویتی ندارنـد. ایـن سـاختارگرائی را "سـاختارگرائیِ الگوئی"(Patternal Structuralism) می‌گویند. رزنیک و شاپیرو مفهومِ ساختار را مفهـومی اولیـه و پیشاریاضی می‌دانند (منیری, ۱۳۹۷).

در دیدگاه ساختارگرایی، عدد ۲ به عنوان جایگاهی در ساختار اعداد طبیعی تعریف می‌شـود که بعد از جایگاه عدد ۱ قرار دارد. به عبارت دیگر، عدد ۲ جایگاه دوم در دنبالـه اعـداد ۰، ۱، ۲، ۳، ... است. بر اساس دیدگاه شاپیرو، پرسش از نحـوه دسترسـی بـه حقـایق ریاضـی بـه حـوزه روانشناسی و علوم شناختی مربوط می‌شود. او باور دارد که ساختارها صرفاً طرح و الگو بـوده و انسان‌ها ذاتاً قادر به تشخیص الگوها هستند. ساختارگرایان بـرای توضـیح کـاربرد ریاضـیات در فیزیک نیز به مفهوم یکریختی ساختارها استناد می‌کنند. به این معنا کـه سـاختارهای ریاضـی بـا ساختارهای فیزیکی جهان یکریخت(Isomorph) هستند (منیری, ۱۳۹۷).

در اینجا سوالی مطرح می‌شود: آیا طرح‌ها، الگوها یـا سـاختارها بصـورتِ ذاتـی در طبیعـت وجود دارند یا آنها حدسها و برساخته‌هایِ ذهنیِ خودِ ما هستند؟ سـاختارهای ریاضـی چطـور؟ پاسخ رئالیسم ساختاری این است که اگر قرار باشد که نظریه‌ها را رئالیستی تفسیر کنیم، با توجـه به اینکه در تحول نظریه‌ها، خصوصاً نظریه‌هـای جدیـد فیزیـک، یـک پیوسـتگی در سـاختارها مشاهده می‌کنیم، می‌توانیم بگوییم که ساختارهای ریاضی بازنمایی ساختارهای فیزیکی در عـالم هستند (Worrall, 1989).

۸.۳ انگارهٔ نگاشت (Mapping Account)

اسـتیون فـرنچ (Steven French) و اتـاویو بوئنـو (Otavio Bueno) طرحـی سـه مرحلـه‌ای بـرایِ کاربردپذیریِ ریاضیات ارائه کرده و آن را " مفهومِ استنتاجیِ کاربرد ریاضیات" نامیدند:

مرحلـــهٔ ۱: ابتـــدا بـــا اســـتفاده از ایزومورفیســـم (Isomorphisms) و هومومورفیســـم (Homomorphisms) یک نگاشت از وضعیتِ فیزیکـی بـه یـک سـاختارِ ریاضـیِ مناسـب انجـام می‌دهیم. این مرحله را "غوطه‌وری"(Immersion) می‌نامیم[۱۳].

مرحلهٔ۲: با استفاده از فرمالیسم و قواعدِ ریاضی، پیامدها و نتایج را اسـتخراج مـی‌کنـیم. ایـن مرحله"اشتقاق"(Derivation) نامیده می‌شود.

مرحلهٔ۳: پیامدهای به دست آمده با استفاده از تفسیر به وضعیتِ فیزیکی برگردانـده مـی‌شـوند. این مرحله، "تفسیر" (Interpretation) نامیده می‌شود. در واقـع در ایـن مرحلـه یـک نگاشـت از نتایج ریاضی به وضعیتِ فیزیکی اتفاق می‌افتد. اما نباید تصور کـرد کـه ایـن نگاشـت معکـوسِ نگاشتِ مرحلهٔ ۱ است. اما ممکن است که ساختارِ ریاضی در دل یک سـاختارِ ریاضـیِ بزرگتـر واقع شده باشد و یا مواردِ اضافی‌ای در آن باشد که در وضعیتِ فیزیکیِ موردِ نظـر نیسـت. ایـن مواردِ اضافی نیز در مرحلهٔ تفسیر به وضعیتِ فیزیکی برگردانده می‌شوند. مـواردِ اینچنینـی را در فیزیک مدرن بسیار میتوان مشاهده کرد (Bueno & French, 2012).

مارک کولیوان(Mark Colyvan) به همراه بوئنو در مقالـه‌ای در نقـدِ انگـارهٔ نگاشـت، سـاختار ریاضی را به نقشه شهر تشبیه کردنـد کـه در آن میتـوان مشـابهت‌هـایی بـا سـاختارِ شـهر(نظیرِ موقعیت و تناسب فواصلِ مکانهای شهر با نقاط رو ی نقشه) مشاهده کرد. ولی شهر ویژگیهـایی دارد که در نقشه نیست و یا در نقشه خواصی است که در شهر یافت نمی‌شـود. آنهـا مشـکلاتِ دیگری نیز برای این طرح برشمردند (نظیر ایده‌آل‌سازی در مـدلهای ریاضـی) ولـی در نهایـت، طرحِ نگاشت را در حـالِ حاضـر، مقبـول‌تـرین طـرح بـرایِ کاربردپـذیریِ ریاضـیات دانسـتند (Colyvan & Bueno, 2011).

۹.۳ تقدمِ تشخیصِ ساختار تجربی بر ساختار ریاضی

بنظر می‌رسد که قبل از عملِ نگاشت، ما یک ساختارِ تجربی را برایِ پدیـده‌هـایِ مـوردِ نظرمـان انتخاب کرده‌ایم و برای انجامِ نگاشت، بسیار مهم است که ما ابتدا ویژگیهـایِ صـوری و روابـطِ ایـن سـاختارِ تجربـی را برجسـته نمـائیم تـا بتـوانیم نگاشـت را انجـام دهـیم. دیویـد ریـزا (Davide Rizza) معتقد است که کاربردِ ریاضیات به تشخیصِ این ویژگیهـایِ فرمـال در سـاختارِ تجربی بستگی دارد. حتی در برخی موارد تشخیصِ همین ویژگیهـایِ صـوریِ سـاختارِ تجربـی ممکن است کافی باشد و ما نیازی به نگاشت نداشته باشیم. فرمولاسیونِ ریاضـی، منبـعِ سـاختار نیستند و تنها به شکلِ مفهومی و استدلالی به ما کمک می‌کنند. دشوارترین مرحله این اسـت کـه

ما تشخیص دهیم با استفاده از چه مفاهیمِ ریاضی مسئله را صورتبندی کنیم تا امکان استدلال از طریقِ ریاضی را برایمان فراهم کند. اینگونه ما میتوانیم به مسئلهٔ تجربی‌مان فکر کنیم. در انتها نتیجه‌گیری می‌کند که هر کاربرد ریاضی، کاربرد از طریقِ نگاشت نیست (Rizza, 2013).

از طرفی رئالیستهایِ ساختاری، ساختارهایِ عالم را مصون از تفسیرها، ذهنیتها و عواملِ فرهنگی و اجتماعی می‌دانستند. اما مواجه با اینِ ایده شدند که قصد و نیتِ انسانها در مدلها و ساختارها دخالت دارد. یعنی فیزیکدان، قبل از مراجعه به ریاضیات، به نوعی فرمِ پیشاصوری می‌رسد که کاملاً ناشی از قصدمندیِ اوست. این کاملاً به ذهنیتِ او وابسته است که چه جنبه‌هائی را برجسته نموده و چگونه در ذهنش مرتب(Arrange) نماید. اطلاعات فی نفسه ساختارمند نیست، ما هستیم که به آن ساختار می‌دهیم و از دادهٔ(Data) خود، یک مدلِ داده (Model of Data) درست می‌کنیم. مدلها نیز مشابه تکنولوژی‌ها، تنها مواردی را که منظورِ سازندهٔ آنها بوده است در بر می‌گیرند (Ladyman, 2014).

۱۰.۳ کاربردپذیری ریاضی دلیلی برایِ رئالیسم

برخی فلاسفه نظیرِ آلکس هاروی(Alex Harvey) کاربردپذیریِ ریاضیات در فیزیک را شاهدی بسیار قوی برایِ رئالیسم دانسته و نتیجه می‌گیرند که ریاضیات و فیزیک هر دو بخشی از جهانِ عینی‌اند و در انتظارِ کشف. در واقع آنها از نامعقول بودنِ کاربردِ ریاضیات، استدلالی برایِ تقویتِ نگاهِ رئالیستی می‌سازند. یعنی اینکه ریاضیات در فیزیک بسیار کاربردپذیر است به نفعِ تعبیر واقعگرایانه است و این کاربردِ قوی نشان می‌دهد که ریاضیات با عالم، ارتباطِ واقعی و دلالتِ واقعگرایانه دارد. او موثر بودنِ ریاضیات را شاهدی برایِ رئالیسم می‌بیند و آن را معقول می‌داند (Harvey, 2011).

در این نگرش رئالیستی،گوئی ریاضیات ابزاری صِرف برای توصیف پدیده‌های فیزیکی نیست، بلکه عمیقاً با جهان در هم تنیده است و نقش اساسی در درک ما از جهان ایفا می‌کند. تیم مادلین (Tim Maudlin) مسئلهٔ ویگنر را بسیار مهم و پیچیده تلقی کرده و پیشنهاد می‌کند که ما باید دیدگاهی واقع گرایانه از ریاضیات اتخاذ کنیم و ساختارهای ریاضی را موجوداتی عینی بدانیم که مستقل از افکار و زبان انسان وجود دارند. او معتقد است که ریاضیات برای دنیای فیزیکی قابل استفاده است، زیرا به طور دقیق ساختار جهان را نشان می‌دهد .دلیل کارآمدی ریاضی در علوم طبیعی یک راز نیست، بلکه نتیجه شباهت ساختارِ ریاضیات و دنیای فیزیکی است (Maudlin, 2016).

۱۱.۳ مدل

غیرواقعگرایانِ علمی معتقدند که در علوم طبیعی ما با مدلها سر و کار داریم و مدلها نیز فقط بر اساسِ کارائی‌شان در توصیف و پیش‌بینیِ پدیده‌ها ارزیابی می‌شوند. از این منظر، تلاش برای پی بردن به ذات و نهادِ عالم، کاری بی‌نتیجه است و یک فیزیکدان تنها باید به دنبالِ انتخابِ یک مدلِ مناسب و موثر برای پدیده‌ها باشد و نه کنکاش در ماهیتِ عالم. بدینسان کسی مانندِ ون‌فراسن (Bas van Fraassen) تئوری‌هایِ علمی را فقط مدل‌هایِ موفق می‌داند (Van Fraassen, 1989).

مدلها محلِ تلاقی ریاضی و فیزیک هستند. از یک سو در فیزیک ما پدیده ها را در قالب مدل‌هایی که قابلیت بیان به شکل ریاضی دارند درمی‌آوریم، از طرفی در ریاضیات الگوها و مدل‌هایی داریم که ما در ذهنمان حدس زده‌ایم و آنها را با دستگاه صوری استنتاج کرده‌ایم و به دنبال این هستیم که ببینیم کدامیک از این مدلها با الگوهای فیزیکی ما قابل تطبیق‌اند. به عنوان مثال می‌توان هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی را در نظر گرفت. هنگامی که ما از اصول موضوعه اقلیدسی گذر کردیم توانستیم به هندسهٔ دیگری دست پیدا کنیم که ظاهرا تطابق بهتری با پدیده‌هایِ طبیعیِ عالم دارد. از آن به بعد با نااقلیدسی فرض کردن هندسهٔ عالم، گویی پدیده‌ها مدلِ مناسبتری یافتند (Palmgren & Rasa, 2022).

از طرفی رونالد گی‌یری(Ronald.N. Giere) معتقد است که دانشمندان از مدلها برایِ وجوهی از جهان، به منظورِ خاصی استفاده می‌کنند. در یک مثال او می‌گوید: اگر ما بخواهیم آب را به منظورِ استفاده در سیستمهایِ انتقالِ مایعات، بررسی کنیم، از مدلی برایِ آن استفاده می‌کنیم که آب را یک سیالِ پیوسته بداند. ولی اگر منظورِ ما بررسیِ حرکتِ براونی در آب باشد، مدلِ گسسته‌ای از مولکولها برایمان مناسب‌تر است. او نتیجه می‌گیرد که قصد (intention) فیزیکدان، در مدلی که انتخاب می‌کند موثر است (Giere, 2004).

اینجا مسئلهٔ کاربردپذیری ریاضیات به این سوال تبدیل می‌شود" چرا مدل‌های ریاضیاتی اینقدر در فیزیک موثر و کاربردپذیرند؟". جواب مدل‌گرایان این است که این مدلها چون تا کنون توصیف و پیش‌بینیِ پدیده‌ها را با دقتی که برایِ ما قابلِ پذیرش است، انجام داده‌اند، هنوز استفاده می‌شوند. ولی هیچ تضمینی وجود ندارد و چنانچه روزی مدل مذکور نتواند از عهدهٔ این کار برآید، ممکن است آن را با مدلِ دیگری جایگزین نمائیم (Gonzalez, 2014). شگفتی و تعجب زمانی بروز می‌کند که ما مدلِ خود را حقیقت‌نما بدانیم. اما اگر مدل را صرفاً ابزاری

ببینیم که به مرورِ زمان و با تجاربِ فراوان، آن را پرداخته‌ایم تا کارگشا باشد، به نظر می‌رسد کـه دیگر اینقدر جایِ تعجب نمی‌ماند.

۱۲.۳ رویکرد معرفت‌شناسی تکاملی و عقلانیت نقاد به مسئلهٔ کاربردپذیری

معرفت شناسی تکاملی کارل پـوپر(PopperKarl) بـر تکامـل دانـش و نقـش آزمـون و خطـا در پیشرفت علمی تأکید می‌کند. در این رویکرد، ماهیت تکاملی توسعه دانـش، کـه توسـط فرآینـد حدس و ابطال شکل می‌گیرد، یک اصل اساسی است و با فلسفهٔ گسـترده‌تـر عقلانیـت نقـاد او همسو می‌شود (Popper, 2002a, pp. 291-301). از این منظر سودمندیِ ریاضیات در مـدل‌سـازی و پیش‌بینی‌هایِ دقیق، محصولِ تلاشِ مستمر و سعی و خطایِ فراوانِ و حکّ و اصلاحاتِ بیشـمار است.

پوپر با ویگنر موافق است که ریاضیات نقش مهمـی در علـوم طبیعـی ایفـا مـی‌کنـد و ابـزار قدرتمندی برای نظریه‌پردازی، پیش‌بینی و آزمایش ایده‌ها فراهم مـی‌کنـد.امـا پـوپر ریاضـیات را توسعه مصنوعی بخشهایی از زبان معمولی می‌داند. ابزاری زبانی که با روندی تکـاملی بـه قصـدِ توصیف حقایق خاصی طراحی شده و دارایِ سیستمهایِ معناییِ مختص به خود است. پس اگـر معلوم شد که این زبان، در راستایِ این هدفِ تا حدودی موفق عمل می‌کند، نباید تعجـب کنـیم. او همچنین تاکید می‌کند که مدل‌های ریاضی، نمی‌توانند درستیِ چیزی را ثابت کنند و به طـور بالقوه می‌توانند باطل شوند (Popper, 2002b, pp. 272-290). ریاضـیدانها همچنـان در حـالِ خلـقِ سیستمهایِ جدیدِ ریاضی هستند. فیزیکدانها نیز در حالِ نظریه پردازیهایِ نو هستند. چیزیِ تمـامِ نشده است.

۱۳.۳ لاکاتوش

فلسفهٔ ریاضی ایمره لاکاتوش(Imre Lakatos) مُلهم از دو نفر اسـت، کـارل پـوپر و جـرج پولیـا. لاکاتوش ابطال‌گرایی پوپری را در قلمرو ریاضیات به کار مـی‌بنـدد. اثباتهـای ریاضـی از نظـر او چیزی جز حدسها و ابطالها نیستند. اکتشاف ریاضی یک روندِ دیالکتیکی دارد. او در کتابش ایـن روند را در تعامل بین معلم و شاگردانش برای ما تمثیل می‌کند. برهانهایِ ریاضی در ابتدا نـاقص و یا اشتباه هستند و به تدریج با نقدهایِ وارده به آنها تکامل پیدا می‌کنند و در پاره‌ای موارد کنـار گذاشته می‌شوند (سیاوشی, ۱۳۸۹).

لاکاتوش پیش‌بینی می‌کند که مسئلهٔ ویگنر می‌تواند با در نظر گرفتن ریاضیات به‌عنوان یک برنامه تحقیقاتی دائماً در حال تکامل که با تعامل بین ریاضیدانان و دانشمندان دائماً در حال اصلاح و گسترش است، حل شود. یعنی اثربخشی ریاضیات در علوم طبیعی تنها به این دلیل نیست که ریاضیات زبان و ابزار مناسبی برای تجزیه و تحلیل و پیش بینی پدیده های طبیعی فراهم می‌کند، بلکه نتیجه توسعه مداوم نظریه ها و روش از طریق فرآیند تکراری حدس و گمان و ابطال است. همچنین نگرش‌های پیشاتئوریک در تحول اثبات‌ها و قضایای ریاضی نقش مهمی داشته‌اند (Lakatos, 1963). بنابراین، پاسخ لاکاتوش به مشکل ویگنر این خواهد بود که اثربخشی ریاضیات در علوم طبیعی چیزی نیست که بتوان آن را به عنوان یک رابطهٔ ایستا یا ثابت درک کرد، بلکه فرآیندی پویا و مداوم از تأثیر و پالایش متقابل بین این دو حوزه است.

۱۴.۳د رویکرد زبانی

مهم‌ترین دغدغهٔ فکری لودویگ ویتگنشتاین(Ludwig Wittgenstein) در رساله، رابطهٔ زبان و جهان است. در آنجا زبان را تصویرِ جهان می‌داند و از نظرِ او گزاره‌هایِ اصیل و صادق آنهایی هستند که اوضاعِ جهان را تصویر کنند. ریاضیات را یک امرِ کاملاً صوریِ و نحوی می‌داند و گزاره‌هایِ ریاضیِ چون جهان را تصویر نمی‌کنند، از نظرِ او صدقِ صوری و نحوی دارند. یعنی ریاضیاتِ کشف کردن نیست بلکه خلق کردن است. گزاره‌هایِ ریاضی پیشینی و تحلیلی‌اند (زارع پور، ۱۳۹۶).

ویتگنشتاین در تراکتاتوس می‌گوید گزاره‌های ریاضی اساساً ارجاعی(Refrential) نیستند و چیزی در مورد چیزهایِ خارج از خود نمی‌گویند. این گزاره‌ها اگر معنایی داشته باشند از طریقِ قواعد و نحوی که وضعِ کرده‌ایم معین می‌شود ولاغیر. او برای احکام ریاضی نقش گرامریِ قائل است و این احکام را قواعدِ «بازی ریاضی» می‌داند. درست مانند فوتبال و بسکتبال که قواعدِ خاص خود را دارند. این قواعد سازندهٔ فرآیند استنتاج ما هستند و نه چیزی بیشتر. او در کتاب "در باب یقین"[۱۴] شک در احکام و گزاره های ریاضی را بی‌معنی می‌داند چون که آنها صرفاً قواعد «بازی ریاضی» یا «گرامر استنتاج و محاسبه» هستند. به عبارت دیگر قبول این احکام فقط قبول یک مهارت عملی برای محاسبه است و اصلاً ربطی به شناخت ما از نتایج کاربردی این احکام ندارد (زارع-پور, ۱۳۹۶).

تصویر سنّتی، ریاضیات را دارایِ دو بخش می‌داند: ۱- مفاهیم و ساخته‌ها و اندیشه‌هایِ ذهنی ۲- زبان که این اندیشه‌ها و ساَخته‌ها در آن ریخته می‌شود و انتقال می‌یابد. ویتگنشتاینِ

وجودِ بخشِ اول را نمی‌پذیرد و به نظر می‌رسد که ریاضی از نظرِ او همان زبانِ ریاضی است. او در دورهٔ متأخرش از کاربردپذیریِ ریاضیات برایِ مقایسه و کنارِ گذاشتنِ بازی‌های ریاضی بدونِ کاربرد استفاده می‌کند. مخالفتِ او با برخی ایده‌هایِ ریاضی نظیر مجموعه‌هایِ نامتناهی را شاید بتوان از همین منظر توجیه نمود (زارع-پور, ۱۳۹۶).

فردیناند سورسور(Ferdinand de Saussure) زبان‌شناس و فیلسوف سوئیسی معتقد بود زبان از دو مولفه تشکیل شده است. یکی وسیله‌ای است برای فرمولبندی و چهارچوبی برایِ مفاهیم و تعریفِ مفاهیم، که به آن Language گفته می‌شود. مولفهٔ دیگر به کاربردنِ کلمات و واژه‌ها برایِ اشیاء و مفاهیم است که به آن speech می‌گوییم. جنبهٔ اول همان چهارچوبِ ذهنیِ مفاهیم است که برایِ همهٔ زبانها یکی است. تفاوتِ زبانها در جنبهٔ دوم است. اگر ما ریاضیات را زبان بدانیم به نظر می‌رسد منظورمان همان Language است (شهشهانی، س.۱۳۹۶. فلسفهٔ ریاضی). با این نگاه، زبانِ ریاضی آنگونه که ویتگنشتاین می‌گوید قراردادی و اختیاری و قابلِ جایگزین کردن با یک زبانِ دیگر نمی‌نماید.

بنظر می‌رسد پاسخِ ویتگنشتاین به مسئله کاربرد ریاضیات در علوم تجربی و بخصوص در فیزیک این باشد که ما خودمان قواعد و نحوِ این دو بازی را به یکدیگر ربط داده‌ایم و اینگونه توانسته‌ایم مهارتهایِ مفیدی بسازیم. از آنجاییکه این بازیها دلبخواه هستند و ربطی به جهانِ خارج پیدا نمی‌کنند، هیچ رازآلودگی نیز در ارتباطِ آنها در میان نیست.

۴. نتیجه‌گیری

براساسِ باورهایِ پیشاتئوریکِ ما، مسئلهٔ کاربردپذیریِ ریاضیات در علوم طبیعی میتواند اشکالِ متفاوتی به خود بگیرد. مسئله ممکن است متافیزیکی، معرفتی، سمانتیکی و یا توصیفی باشد. همچنین، قبل از پاسخ به مسئلهٔ کاربردپذیری باید موضعِ خود را در قبالِ چیستیِ ریاضیات و فیزیک و تمایز معرفت‌شناختیِ آنها مشخص کنیم. ممکن است ما ریاضیات را صرفاً یک ابزارِ زبانی بدانیم. برخی نیز ممکن است آن را هم دارایِ مولفهٔ زبانی و هم دارایِ مولفهٔ تئوریک بدانند. در صورتِ اخیر باید نسبت وجهِ زبانی و وجهِ تئوریکِ ریاضیات روشن شود تا بتوانیم تفاوت و شباهتِ تئوریهایِ ریاضی و تئوریهایِ فیزیکی را نیز نشان دهیم.

واقع‌گرایی یا ناواقع‌گرایی نسبت به علم نیز می‌تواند بر پاسخ به این مسئله تأثیرگذار باشد. در نگاهِ رئالیستی ما به دنبال کشفِ واقعیتیم و در نگاهِ غیر رئالیستی حداکثر به دنبال پیدا کردنِ مدل‌هایی هستیم که خوب پیش‌بینی کنند. شاید به نظر برسد که سؤالِ ما از زمینه‌ای رئالیستی

برمی‌خیزد و اگر ما نگاهی ابزارانگارانه و یا غیر رئالیستی به علوم داشته باشیم، مسئله منحل شود. اما اینطور نیست چون حتی در این صورت هم باید پاسخ دهیم که چرا اینِ ابزارِ خاص بطورِ شگفت‌آوری در علوم کارآمد است؟ در هر حال چگونگیِ صورتبندیِ مسئله، می‌تواند بیان‌گر موضع‌گیری‌هایِ مهمِ ما در فلسفه و فلسفهٔ علم باشد.

پی‌نوشت‌ها

۱. منظور از قواعد هایزنبرگ، دو قاعده به شرح زیر است:

الف) مجموعه فرکانسهای تمام خطوط مشاهده پذیر در طیف گسیل شده از اتم در جهش از حالت مانای m به حالت n عبارتند از:

$F_{mn} = E_m - E_n/h$

ب) احتمالِ گذار از m به n بیانگرِ شدتِ طیفِ ارسالی با فرکانسِ F_{mn} است.

۲. لمب، ویلیس یوجین (۱۹۱۳ـ ۲۰۰۸) Lamb, Willis Eugen فیزیک‌دان امریکایی. به طرح مجدد نظریهٔ کوانتومی دیراک پرداخت. چنین تصور می‌شد که هر دو حالت اتم هیدروژن، با وجود تمایز، انرژی یکسانی دارند. در ۱۹۴۷، لَمب به همراه رابرت رادرفورد با آزمایش‌هایی پیشرفته نشان دادند که دو تراز $^2S_{1/2}$ و $^2P_{1/2}$ انرژی یکسانی ندارند.

۳. در فلسفهٔ ریاضی این ایده را نگاهِ فرمالیستی به ریاضیات مینامند.

۴. برای ثبت توزیع احتمال یک کمیت فیزیکی از یک بردار استفاده می‌شود. اگر بخواهیم دو کمیت را به طور همزمان ثبت کنیم، می توانیم دو بردار واحد بگیریم یا به طور معادل از دو فضای هیلبرت استفاده کنید. اما در مکانیک کوانتومی، ما اصرار داریم که یک فضا وجود داشته باشد و تمام کمیتها و ویژگی‌هایِ فیزیکی دیگر در آن فضا توسط یک بردار ثبت شود. این اصل حداکثری است. اگر مختصات بردار واحد، اعداد مختلط باشند (که دارای مقدار و فاز هستند) بردار واحد می تواند این کار را انجام دهد. برای هر ویژگی فیزیکی، مجموعه متفاوتی از مختصات را در همان فضا به بردار واحد مرتبط می‌کنیم. بدین ترتیب، مختصات تکانه، مختصات موقعیت و غیره خواهیم داشت که اطلاعاتی در مورد تکانه، موقعیت و سایر کمیتهایِ شئ می‌دهند.

5. The indispensability of mathematics

6. The Applicability of Mathematics in Science: Indispensability and Ontology

7. The Applicability of Mathematics As a Philosophical Problem

۸. Species Specific: معیارها و مفاهیم وابسته به ویژگیها و محدودیتهایِ یک موجود یا نوعِ خاص

9. A match not made in heaven: on the applicability of mathematics in physics

۱۰. منظور از تقارن و اصول ناوردا در اینجا این است که در فیزیک با همبستگی‌هایی بین اشیا یا امور مواجهیم که نسبت به زمان، مکان، ناظر، شئ و... حساس نبوده و یک ثباتی دارند وما را به این باور می‌رسانند که در اینجا با قانونی جهان‌شمول مواجهیم.

۱۱. هایدگر ریاضیات را صورت خاصی از "متمتیکال" می‌دانست.

۱۲. هایدگر در مقاله "عصر تصویر جهان" (۱۹۳۸) به ویژگی متمتیکال بودن علم جدید پرداخته و استدلال می‌کند که علم جدید با تبدیل جهان به مجموعه‌ای از اشیاء قابل اندازه‌گیری و محاسبه‌پذیر، آن را به تصویری تبدیل می‌کند که می‌توان بر آن تسلط یافت.

۱۳. نمونه ای از ساختار فیزیکی که می توان آن را با استفاده از ایزومورفیسم یا هممورفیسم به یک ساختار ریاضی نگاشت، میدان مغناطیسی است.

در میدان‌های مغناطیسی، ساختار ریاضی را می توان با یک میدان برداری نشان داد که یک شی ریاضی است که به هر نقطه از فضا یک بردار اختصاص می‌دهد. ساختار فیزیکی میدان مغناطیسی را می‌توان با استفاده از ایزومورفیسم به این ساختار ریاضی نگاشت. ایزومورفیسم تضمین می‌کند که خواص و روابط بین خطوط میدان مغناطیسی در ساختارهای فیزیکی و ریاضی یکسان می‌مانند. از طرف دیگر می توان از هممورفیسم برای نگاشت عملیات انجام شده بر روی میدان مغناطیسی به عملیات متناظرِ آن در میدان برداری استفاده کرد. برای مثال، عملیات محاسبه شدت میدان مغناطیسی در یک نقطه معینِ از فضا را می توان با عملیات محاسبه بزرگی بردار در آن نقطه از میدان برداری نگاشت کرد. این نگاشت عملیات انجام شده بر روی میدان مغناطیسی را حفظ می کند و اطمینان حاصل می کند که نتایج به دست آمده از ساختار ریاضی با نتایج به دست آمده از ساختار فیزیکی مطابقت دارد. به طور خلاصه، میدان مغناطیسی در فیزیک را می توان با استفاده از ایزومورفیسم و هممورفیسم به یک ساختار ریاضی نگاشت، که امکان درک و تجزیه و تحلیل بهتر پدیده فیزیکی را فراهم می‌کند.

14. On Certainty

کتاب‌نامه

زارع‌پور, م. ص.(۱۳۹۶). فلسفهٔ ریاضی ویتگنشتاین. دانشگاه شریف.

سیاوشی, ا. (۱۳۸۹). فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش. فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی(۴۵), ۵۱–۶۰.

طالب زاده, س. ح. (تابستان ۱۳۸۴). تحلیل فلسفی از نسبت ریاضیات و علم جدید. فصلنامهٔ فلسفهٔ دانشگاه تهران(۱۰), ۵۱–۷۶.

گنون, ر. (۱۳۶۵). سیطرهٔ کمیت و علائم آخرالزمان (ترجمهٔ ع. کاردان). مرکز نشر دانشگاهی.

منیری, م. (۱۳۹۷). ساختارگرایی در فلسفهٔ ریاضی معاصر. فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی, ۳۷(۶۳), ۳۷–۵۰

Baker, A. (2011). Explaining the applicability of mathematics in science. Interdisciplinary Science Reviews, 36(3), 255-267 .

Balaguer, M. (2001). Platonism and anti-platonism in mathematics. Oxford University Press, USA .

Bangu, S. (2012). The Applicability of Mathematics in Science: Indispensability and Ontology. Basingstoke: Palgrave Macmillan .

Bonheure, D., Gazzola, F., Maz'ya, V., & Hinshelwood, C. N. S. (2019). About mathematics and reality, Albert Einstein (1921 Nobel Prize in Physics), in his Geometry and Experience talk at the Prussian Academy of Sciences in Berlin .

Colyvan, M. (2001). The Indispensability of Mathematics. Oxford university press

Culler, J. (1998). Structuralism.

Frege, G. (1988). Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl (Vol. 366). Felix Meiner Verlag .

Giere, R. N. (2004). How Models Are Used to Represent Reality. Philosophy of Science, 71(5), 742-752 .

Gonzalez, W. J. (2014). On representation and models in Bas van Fraassen's approach. Bas van Fraassen's approach to representation and models in science, 3-37 .

Harvey, A. (2011). The reasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Springer Science+Business Media, 43, 3657-3664 .

Heidegger, M. (1977). The age of the world picture. In Science and the Quest for Reality (pp. 70-88). Springer .

Islami, A. (2016). A match not made in heaven: on the applicability of mathematics in physics. Springer .

Ladyman, J. (2014). Structural Realism. In E. N. Zalta (Ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Metaphysics Research Lab, Stanford University .

Lakatos, I. (1963). Proofs and refutations. Nelson London

Liston, m. (2000). Mark Steiner. The applicability of mathematics as a philosophical problem. Philosophia Mathematica .

Lützen, J. (2011). The Physical Origin of Physically Useful Mathematics. Interdisciplinary Science Reviews, 36(3), 229-243 .

Maudlin, T. (2016). How Mathematics Meets the World. Springer, 91-102

Omnès, R. (2011). Wigner's "Unreasonable Effectiveness of Mathematics", Revisited. Foundations of Physics, 1729-1739 .

Palmgren, E., & Rasa, T. (2022). Modelling Roles of Mathematics in Physics. Science & Education.

Popper, K. R. (2002a). TRUTH, RATIONALITY, AND THE GROWTH OF SCIENTIFIC KNOWLEDGE. In Conjectures and Refutations (pp. 301-291). Routledge

Popper, K. R. (2002b). Why are the Calculi of Logic and Arithmetic Applicable to Reality? In Conjectures and Refutations. Routledge .

Reck, E., & Schiemer, G. (2019). Structuralism in the Philosophy of Mathematics

Rizza, D. (2013). The applicability of mathematics: Beyond mapping accounts. Philosophy of Science, 80(3), 398-412 .

Simons ,p. (2001). MARK STEINER The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. The British Journal for the Philosophy of Science, 181-184 .

Steiner, M. (1995). The applicabilities of mathematics. Philosophia Mathematica, 3(2), 129-156 .

Steiner, M .(۱۹۹۸) .The Applicability of Mathematics As a Philosophical Problem. Harvard University Press .

Van Fraassen, B. C. (1989). Laws and symmetry. Clarendon Press

Wigner, E. p. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciencesCommunications on Pure and Applied Mathematics, 13(1), 1-14 .

Worrall, J. (1989). Structural realism: The best of both worlds? dialectica, 43(1-2), 99-124

Ye, F. (2010). The Applicability of Mathematics as a Scientific and a Logical Problem. Philosophia Mathematica, 18, 144-165 .