فلسفهٔ علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
سال سوم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۲، صص ۷۳–۹۷

پروژهٔ منطق‌گرایی در ریاضیات: از بولتزانو تا راسل

غلامحسین مقدم حیدری*

چکیده

آموزهٔ منطق‌گرایی عبارت است از فروکاستن مفاهیم و قضایای ریاضی به مفاهیم و قضایای منطقی. این آموزه که یکی از مکاتب مهم فلسفهٔ ریاضی است، را نخستین بار برنارد بولتزانو صورت‌بندی کرد و سپس گوتلپ فرگه سعی کرد با ارائهٔ نسخهٔ جدیدی از منطق آن را ادامه دهد. درنهایت این آموزه را به صورت پروژه‌ای، برتراند راسل و آلفرد نورث وایتهد عملی کردند. در این مقاله نخست تلاش خواهم کرد چگونگی تحول و تکوین این پروژه را از بولتزانو تا راسل بررسی کنم. سپس با بررسی ضعف‌ها و قوت‌های آن، سعی خواهم کرد به این پرسش پاسخ دهم که آیا برنامهٔ منطق‌گرایی رضایت‌بخش بود؟

کلیدواژه‌ها: منطق‌گرایی، این‌همانی، هم‌توانی، اصل متعارف بی‌نهایت، اصل متعارف انتخاب، اصل تحویل پذیری، نظریهٔ انواع، نظریهٔ انشقاق انواع، تعریف غیر اسنادی.

۱. مقدمه

گرچه کانت دربارهٔ ریاضیات آرای چندانی ندارد و نمی‌توان وی را یک فیلسوف ریاضی نامید، نظرات او در این حوزه تأثیر مهمی در نگرش ما به ماهیت ریاضیات داشته است. «مسئلهٔ کانت نشان‌دادن این بود که چگونه ریاضیات در عین این‌که معرفتی پیشینی است، هم‌چنان به طور جهان شمول و با قطعیتی غیر قابل خدشه برای تمامی تجارب ما قابل کاربرد است» (Shapiro, 2000: 77). کانت معتقد بود که امکان ریاضیات که ترکیبی پیشینی

* استادیار گروه فلسفهٔ علم و فنّاوری، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی gmheidari@gmail.com
تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۹/۷، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۱/۱۱

است فقط بر حسب این نظریه که مکان و زمان شهودات پیشینی محض‌اند قابل تبیین است. برای مثال این قضیه را درنظر بگیرید: «ممکن است شکلی با سه خط مستقیم رسم کرد». این قضیه را نمی‌توان از تحلیل صرف مفاهیم خط مستقیم و عدد سه نتیجه گرفت، بلکه باید مثلث را ترسیم کرد و آن را به ذهن خود در شهود عرضه کنیم. ممکن نیست که چنین شهودی تجربی باشد، زیرا در این صورت نمی‌تواند قضیه ای ضروری نتیجه دهد؛ پس شهود باید پیشینی باشد. بنابراین مثلث نه شیئی فی‌نفسه است و نه صورت خیالیهٔ آن؛ شیء فی‌نفسه نیست، زیرا امور نفس الامری در نظر ما ظاهر نمی‌شوند و حتی اگر امکان شهود امور نفس الامری را تصدیق کنیم این شهود نمی‌تواند پیشینی باشد. شیء باید به ذهن ما در شهود پسینی عقلی عرضه شود، البته اگر چنین چیزی ممکن باشد.

همچنین نمی‌توان فرض کرد که مثلث صورت ذهنی یا تصور شیء فی‌نفسه است، زیرا قضایای ضروری‌ای که از ترسیم مثلث نتیجه می‌گیریم راجع به خود مثلث است؛ مثلاً می‌توانیم خواص مثلث متساوی الساقین را ثابت کنیم، ولی دلیلی نداریم بر این‌که آن‌چه ضرورتاً دربارهٔ تصوری صادق است دربارهٔ شیء فی‌نفسه هم صادق است. پس چگونه می‌توانیم در شهود اعیانی بسازیم که ما را قادر می‌کنند قضایای پیشینی ترکیبی را بیان کنیم؟ فقط در صورتی می‌توانیم این کار را بکنیم که در ما استعداد و قوهٔ شهود پیشینی باشد که شرط کلی و ضروری امکان اعیان شهود خارجی است. به عبارت دیگر ریاضیات علم تحلیلی محض نیست که فقط معلوماتی دربارهٔ مضامین مفاهیم یا معانی الفاظ می‌دهد، بلکه معلومات پیشینی دربارهٔ متعلقات شهود خارجی است. اما این ممکن نیست مگر این‌که شهودات لازم برای ساختن ریاضیات همگی مبتنی‌بر شهودات پیشینی باشند که شرایط ضروری برای نفس امکان متعلقات شهود خارجی هستند. بنابراین «هندسه علمی است که خواص مکان را ترکیباً ولی به نحو پیشینی تعیین می‌کند» (کاپلستون،۱۳۸۷: ٦/ ۸۲).

هندسهٔ اقلیدسی مجموعه‌ای از قضایای ترکیبی پیشینی است دربارهٔ ساختار مکانی که به ادراک درمی‌آید. بنابراین اصول و قضایای این هندسه جزو حقایقی هستند که ما فقط بدان صورت جهان را ادراک می‌کنیم؛ «کانت اظهار کرد که یگانه تبیین همان است که اصول اقلیدس دربارهٔ چگونگی پردازش‌گری داده‌های حسی، داده‌هایی که فضای حقیقی را تشکیل می‌دهند، ارائه می‌دهد. فضای پردازش‌شده ، فضای مطالعه‌شده در هندسه ، تحت قلمرو اصول اقلیدس است ، زیرا اصول اقلیدس همان اصولی هستند که فضا را تشکیل داده‌اند! ناتوانایی ما در تردید در اصول اقلیدس، انعکاسی از این حقیقت است که مغز ما

طوری ساخته شده که ما واقعاً قادر نیستیم دربارهٔ فضا به روش دیگری فکر کنیم (Trudeau, 1987: 113).

نظریهٔ کانت دربارهٔ ریاضیات، انتقاداتی را به همراه داشت و همین انتقادات سبب بروز اندیشه‌هایی شد که به منطق‌گرایی ختم شد. از جمله مهم‌ترین منتقدان نگرش کانت می‌توان به بولتزانو و فرگه اشاره کرد.

۲. برنارد بولتزانو

برنارد بولتزانو (Bernard Bolzano) (۱۷۸۱–۱۸٤۸) ریاضی‌دان و منطق‌دان اهل پراگ بود. بولتزانو در کتاب *نظریهٔ علم* آموزهٔ شهود محض کانت را مورد نقد و بررسی قرار می‌دهد. کانت به دنبال مبنایی برای تشخیص صدق های پیشینی و تحلیلی بود. او معتقد بود که مبنا و معیار صدق‌های تحلیلی «اصل عدم تناقض» است. بنابراین اگر بتوانیم نشان دهیم نقیض یک گزاره مستلزم تناقض منطقی است در این صورت گزارهٔ مزبور تحلیلی خواهد بود، اما چنین استدلالی برای صدق‌های ترکیبی برقرار نیست. صدق‌های گزاره‌های ترکیبی پسینی از تجربه به دست می‌آید، اما صدق های گزاره‌های ترکیبی پیشینی فقط به کمک «شهود» قابل تحقیق است. از این رو صدق گزاره‌های ریاضی که گزاره‌های ترکیبی پیشینی هستند فقط به کمک شهود امکان پذیر است. واضح است که چنین معیاری از ارتباط میان صدق ها در یک گزاره برنمی‌آید، بلکه نوع کاملاً متفاوتی از ارتباط است و این دقیقاً همان نکته‌ای است که بولتزانو به آن اشاره می کند؛ «آن‌چه کانت هنگام صحبت کردن از شهود که مبنای صدق است، برای نمونه در بستر یک نظریهٔ ریاضی، در فکر دارد ناکافی و گمراه‌کننده است» (Lapointe, 2011: 16). او با این ایده که شهود می‌تواند بخشی از یک تبیین برای مبنای صدق باشد موافق نیست.

از نظر بولتزانو معرفت ریاضی حاصل مفاهیم خالص با استمداد از تعاریف است و نه شهود. صدق نظام‌های استنتاجی هم‌چون حساب و هندسه بر صدق گزاره‌های دیگری قرار گرفته‌اند که صدق آن‌ها عینی هستند یعنی از تعاریف آن‌ها به طور بدیهی نتیجه شده‌اند. از این رو بولتزانو با کانت موافق نیست که شهود می‌تواند در ریاضیات، نقشی مبنایی بازی کند. این ایده که برای توجیه صدق یک گزاره می‌توان به شناخت‌های غیر مفهومی متوسل شد با هدف عمل استنتاج ناسازگار است. ریاضیات باید بر ارتباط های منطقی محض در

ساختاری از اصل موضوع‌ها بنا شود که در آن گزاره‌ها به مثابهٔ مبانی عینی بـا نتـایج عینـی خود مرتبط هستند.

مسئلهٔ اصلی بولتزانو با کانت در به‌کارگیری مفهوم مبنا هست. کانت شهود را مبنایی مورد قبول برای اثبات‌های ریاضی می‌داند؛ به طوری که صدق‌هـای هندسـی از اصـول موضوعه و به واسطهٔ گام‌های منطقی محض در یک رویهٔ استنتاجی اثبـات نمـی‌شـوند. بولتزانو معتقد است که اگر نظرات کانت را بپذیریم، ریاضیات علمی استنتاجی نیسـت. درواقع کانت مسئول این گرایش در فلسفهٔ آلمانی است که بنابر آن «دانشمندان از التزام به فراهم‌کردن اثبات‌های صلب و تعاریف دقیق در رشته‌های مـرتبط‌شـان آزاد هسـتند» (ibid: 17).

ریشه‌های نگرش بولتزانو را می‌توان در ارائهٔ مفهومی جدید و مفید از «اصول موضوعه» و دقت منطقی جست وجو کرد که فراتر از کار ریاضی‌دانان پیشین بود. موضوعات منطقـی که بولتزانو بدان‌ها توجه داشت در حوزهٔ کارش در حساب یا روش‌شناسی علم بود. به طور کلی جذابیت نوشته‌های او را می‌توان روش مثمری دانست که او فلسفه، ریاضیات، و منطق را با هم ترکیب می‌کرد و هر کدام را برای وضوح بقیه به کار می‌برد. بولتزانو در مقایسه بـا ریاضی‌دانان گذشته رویکرد صلب و سخت‌تری به اصول موضوعه داشـت. پیشـینیان او در این زمینه آرای ملایم‌تری داشتند؛ یعنی آن‌ها نیازی نمی‌دیدند که همهٔ گزاره‌های ریاضـی را اثبات کنند و برخی از آن‌ها را با عنوان بدیهیات معاف از اثبات می‌دیدند. آن‌ها معتقد بودند که شرط اصلی برای یک اصل موضوع «یقینـی»بـودن آن اسـت یعنـی حقیقتـی بـدیهی و بی‌واسطه که محاسبات حساب و هندسهٔ اقلیدسی بر آن بنا شـود. حـال آن‌کـه بولتزانـو در مقدمـهٔ کتـاب *Preface to Considerations on Some Objects of Elementary Geometry* (۱۸۰٤) متذکر می‌شود که ملزم به پژوهش در ارائهٔ اثبات حتی برای گزاره‌های بدیهی است تا «همهٔ حقایق ریاضی را که در مبنایی‌ترین سطح ریاضیات قرار دارد را نیز آشکار کند». او معتقد است که چنین مفهومی از اصول موضوع به سه دلیل بهتر است: رسیدن به تمامیـت، ساده‌تر کردن ارزش موضوعات، و کشف قضایای جدید (Ewald, 1999: 169).

بولتزانو میان «ارتباط عینی» میان احکام عینی که در آن حکمـی نتیجـهٔ حکـم دیگـری است و «بازسازی ذهنی» این ارتباط جدایی قائـل اسـت. از نظـر او بـدیهیات بـه قلمـرو ذهنیات متعلق‌اند، در حالی که شرح و تفسیرهای علمـی بـیش از آن‌کـه بـه آشکارسـازی ارتباط میان گزاره‌ها متعلق باشند به روشن‌کردن ساختار منطقی صادق آن‌ها مرتبط هستند.

بنابراین اصول موضوعه همان صدق‌های منطقی هستند که صدق‌های ریاضی نیز بـدان‌هـا تعلق دارند. البته ما نباید آن‌ها را با صدق های روان‌شناختی که برای ما یقینی هستند اشتباه کنیم. بولتزانو این مفهوم غیر روان‌شناختی از ریاضیات را به کل علم گسترش داد. یعنی به قلمرویی از گزاره های صـادق عینـی کـه مسـتقل از فاعـل شناسـا هسـتند و در سـاختار پیچیده‌ای به وسیلهٔ ارتباط های درونی عینی سامان داده شده‌اند. او ایـن نـوع گـزاره هـا را sentence-in-itself/ Sätze-an-sich می‌نامید؛ این نوع جملات نقشی مرکزی در نوشته‌های بولتزانو، به‌ویژه بیان مجموعه‌های نامتناهی در ریاضیات، داشتند.

علاقهٔ بولتزانو به روش شناسی منطقی سبب شد تا او مطالعات عمیق تری در بنیادهـای ریاضیات کند و بدین گونه به قضایای مهمی در ریاضیات دست یابد. او در کتاب *درآمدی بر برخی مسائل هندسهٔ مقدماتی* این روش را برای مبانی هندسه به کار می‌گیرد و صریحاً رویکرد فضایی و هندسی سنتی به مبانی ریاضـیات را کنـار مـی‌گـذارد و تحلیـل صـرف منطقی را مبنای محاسبات و زمینه‌ساز حساب قرار می‌دهد.

بولتزانو با نقد ریاضی‌دانان پیش از خود، بـه آن جهـت کـه نظریـهٔ حرکـت را وارد هندسه کرده‌اند، خاطر نشان می‌کند که نظریهٔ فضـا از نظـر منطقـی بـر نظریـهٔ حرکـت اجسام در فضا متقدم است و بنابراین باید بدون توسل به نظریهٔ حرکـت توسـعه یابـد. بنابراین باید مفهـوم حرکـت از تعـاریف مفـاهیم ریاضـی هـم چـون حـد در حسـاب دیفرانسیل و انتگرال حذف شود. از نظر او حساب هم از نظر منطقی بر هندسـه متقـدم است؛ از این رو باید مبانی ریاضیات و حتی هندسه را هم بر حساب و جبر بنا کـرد. او در رساله‌ای فلسفی به پژوهش های تحلیلی منطقی و تعاریف صلب و دقیقی از مفـاهیم ریاضی مثل پیوستار حقیقی، حد، قضیهٔ مقدار میانی، و قضـیهٔ بولتزانـو- وایرشـتراس، و دیفرانسیل می‌پردازد. علاقهٔ او به اثبات های دقیق و صلب سبب شـد کـه اولـین کسـی باشد که سعی در اثبات برخی از قضایای ریاضی کند که قبلاً مورد توجه کسی نبودند و آن‌ها را بدیهی می‌دانستند. یکی از این قضایا این بود که یک منحنی بستهٔ سـاده صـفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند؛ این قضیه بعدها به قضیهٔ جـردن معـروف شـد و اسـوالد وبلن آن را در ۱۹۰۵ ثابت کرد.

به این ترتیب بولتزانو را می‌توان از پیشگامان نوعی منطق گرایی دانست که بـه واقعیـت خارجی گوهرهای منطقی اعتقاد دارد؛ اعتقادی که می‌توان در پایـان قـرن نـوزدهم در نـزد کسانی چون فرگه و هوسرل دوباره پی گرفت.

۳. فرگه

مایکل دامت، فیلسوف ریاضی معاصر، معتقد است:

«یگانه فیلسوف قرن نوزدهم که می‌توان از محتوای نوشته هایش به طور مدللی حدس زد که در فرگه تأثیر گذاشته است برنارد بولتزانو است. کسی که در همان سالی که فرگه متولد شد از دنیا رفت، اما هیچ شاهدی وجود ندارد که فرگه حتی آثار بولتزانو را خوانده است یا نه» (Dummett, 1991: vii).

حق با دامت است؛ می‌توان فرگه را در ادامهٔ راهی قرار داد که بولتزانو آن را آغاز کرد و سرانجام به آموزهٔ منطق گرایی در ریاضیات ختم شد. آموزهٔ مشترکی که در کارهای هر دوی آن‌ها هست آن است که «بولتزانو و فرگه دلایل یک‌سانی دارند برای این‌که فکر کنند محتوای باورها و گرایش‌های شناختی ما هم عینی و هم مجرد هستند» (Lapointe, 2011).

بولتزانو درکی از گزاره ها دارد که گویا آن‌ها ماهیت های مستقل فکری هستند. او معتقد است: «منطق‌دان باید همان حق را برای صحبت دربارهٔ خود صدق‌ها داشته باشد که هندسه‌دان از خود فضاها سخن می‌گوید بدون این‌که دربارهٔ آن‌ها به مثابهٔ چیزی که با اشیا پر می‌شود فکر کند» (ibid: 133). چنین تصوری از منطق پایهٔ تلاش‌های فرگه برای ساختن منطق جدید و مبانی حساب بر اساس آن است. فرگه به جای مفهوم گزارهٔ «یک‌نواخت» (monotic)، که در ابتدا چیزی جز نشان‌دادن شمول محمول در موضوع $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow Q \in P$ نبود، مفهومی منسجم‌تر و گویاتر «تحلیلی» را به کار برد. این مفهوم برابر است با کاربرد دقیق نوع خاصی از استلزام: گزاره‌هایی به عنوان اصل مورد قبول هستند که بتوان آن‌ها را صرفاً از قوانین اصولی منطق و تعاریف مربوط به آن‌ها استنتاج کرد. فرگه تلاش می‌کرد تا تحلیل و تجزیهٔ حقایق ریاضی را از طریق اقامهٔ اثبات برای تحلیلی‌بودن گزاره انجام دهد. فلیپ کیچر معتقد است:

«فرگه بخش بزرگی از کارش را به تلاش برای نشان‌دادن این موضوع کرد که اصطلاحات حساب می‌توانند فقط با به کارگیری اصطلاحات منطق تعریف شوند؛ بنابراین صدق های حساب، اختصارات منطقی صدق های منطق هستند و همهٔ صدق های منطق می‌توانند از تعداد کمی از قوانین پایه‌ای صریح و روشن به کمک قواعد استنتاج که به طور دقیق فرموله شده‌اند استنتاج شوند» (Kitcher, 1979: 235).

بدین‌گونه فرگه سعی کرد نشان دهد که علم حساب، حداقل در مرتبهٔ اول، دارای

خاصیت تحلیلی است که خود بر اصول منطق مبتنی است. مثلاً $Pi(x)$ را بتوان درنهایت به **P** که گزارهٔ هم‌سان (collinear) و تحلیلی و یکی از قوانین منطق است تبدیل کرد. یعنی $Pi(x), \beta i : \sum_{i=0}^{n} Pi(x)\, \beta i \rightarrow P$. فرگه معتقد بود که اعداد اشیای منطقی هستند و هدف فلسفهٔ ریاضی مشخص کردن آن‌هاست. او تعریف عدد را با خلق آن مترادف نمی‌دانست، بلکه تحدید چیزی می‌دانست که استقلال وجودی دارد. برای فرگه تعریف عدد از طریق متمایزکردن آن در یک مرحلهٔ ساختمان ریاضی کافی نیست و نیز نمی‌توان عدد را به مثابهٔ یک اصل موضوعه تعریف کرد. باید عدد را از طریق تعریف مشخص کرد و باید تعریف قولی باشد که دلالت بر ماهیت می‌کند. درنتیجه باید وجود عدد از طریق تعریف بیان شود. تعریف فرگه از عدد و روش ساختن اعداد بسیار مشهور است؛ در زیر به طور خلاصه آن را می‌آوریم.

۱.۳ ساختن عدد[۱]

فرگه معتقد است در پاسخ به این پرسش که عدد چیست، نمی‌توان خود لفظ دال بر عدد را مورد پرسش قرار داد. یعنی نباید به دنبال معنای «یک» باشیم، بلکه معنای اعداد در ضمن گزاره‌هایی که راجع به آن‌ها می‌سازیم قابل فهم است. او درواقع واحد معنایی را جملهٔ کاملی می‌داند که اجزای جمله در ضمن کل آن معنای خود را می یابند، لذا به تحلیل گزاره‌هایی می‌پردازد که راجع به اعداد هستند.

فرگه گزاره‌هایی عددی (گزاره‌های راجع به اعداد) را به حمل یک مفهوم مرتبهٔ دوم به یک مفهوم مرتبهٔ اول تحلیل می‌کند؛ مثلاً «تعداد سیاره‌های منظومهٔ شمسی ۹ تاست» از مفهوم مرتبهٔ اول «تعداد سیاره‌های منظومهٔ شمسی» و مفهوم مرتبهٔ دوم «۹ تاست» تشکیل شده است. از نظر فرگه، اعداد مفاهیم مرتبهٔ دوم هستند یعنی مفاهیمی که مصادیق آن‌ها را مفاهیم مرتبهٔ اول تشکیل می‌دهند. به تعبیر دیگر برای فرگه عدد نه یک کلاس هم‌ارزی از همهٔ مفاهیمی است که ویژگی مشترک آن‌ها «دارای نه مصداق‌بودن» است. تا این‌جا فرگه مفهوم کلی عدد را بر اساس مفهوم و مصداق تعریف کرده است. آن چه به ظاهر باقی مانده است تعریف اعداد جزئی «صفر» و «یک» و بعد از آن تعریف «به اضافهٔ یک» است تا بتوان قدم به قدم و با شروع از «یک»، اعداد را ساخت؛

الف) عدد صفر متعلق به مفهومی است که برای هر a مستقل از این‌که a چیست، مصداق F نباشد. به تعبیر دیگر F مفهومی است که هیچ مصداقی ندارد.

ب) عدد یک عدد مفهوم F است اگر برای هر a مستقل از این‌که a چیست، مصداق F نباشد، مگر این‌که برای هر b اگر b مصداق F بود آن‌گاه a=b. به تعبیر دیگر عدد یک متعلق به مفهومی است که صرفاً یک مصداق داشته باشد.

ج) عدد n+1 متعلق به مفهوم F است اگر شیء a مصداق F وجود داشته باشد به قسمی که n متعلق باشد به مفهوم «مصداق F بودن، اما مخالف a بودن».

به‌نظر می‌رسد وظیفهٔ فرگه در تعریف و ساخت اعداد به پایان رسیده باشد، اما دو مسئلهٔ حل‌نشده باقی مانده است:

اولاً، فرگه هر عدد را قائم به ذات می‌داند، اما چطور می‌شود یک عدد یک شیء قائم به ذات باشد، اما گزاره‌ای که راجع به آن است دربارهٔ یک مفهوم باشد؟

ثانیاً، خود فرگه نیز بر این باور است که این تعریف کلی از مفهوم عدد نمی‌تواند مسئلهٔ عدد را حل کند، زیرا ما معنای عبارت «عدد n متعلق است به مفهوم G» را همان‌قدر درمی‌یابیم که معنای عبارت «عدد n+1 متعلق است به مفهوم F».

البته ما می‌توانیم با این تعاریف معنای «1+1 متعلق است به مفهوم F» را بیان و سپس به وسیلهٔ آن معنای «1+1+1 متعلق به مفهوم F است» را توضیح دهیم. درواقع مسئلهٔ فرگه این است که تعریف او از اعداد یک تعریف مانع است. البته اگر ما بدانیم که n یک عدد است آن گاه می‌توانیم آن را بنا به دستور لایب‌نیتس و تعاریف فرگه بسازیم، اما اگر ندانیم که n واقعاً چیست تعریف فرگه هیچ کمکی به ما نمی‌کند. تعریف فرگه فرایندی است که با پیروی از آن می‌توان به هر عددی دست یافت، اما آن‌چه نمی‌دانیم این است که فقط اعداد طبیعی به وسیلهٔ این فرایند به دست می‌آیند.

به‌علاوه اگرچه می‌دانیم که برای هر مفهوم F عددی مانند n وجود دارد که «عدد n متعلق به مفهوم F است»، هنوز نمی‌توانیم مطمئن باشیم که n یکتاست. تا این یکتایی را ثابت نکنیم نمی‌توانیم یکتایی کاربرد یک عدد را در معادلات گوناگون توجیه کنیم.

در پاسخ به این سؤال فرگه نخست به تدقیق این‌که «عدد یک شیء قائم به ذات است» می‌پردازد. او ابتدا بیان می‌کند که عدد چه چیزهایی نمی‌تواند باشد؛ عدد عرض و ویژگی یک شیء نیست و ویژگی مفاهیم نیز نیست. اگرچه وجود و یکتایی مثلاً ویژگی مفهوم «قمر زمین» است، عدد «یک» ویژگی این مفهوم نیست. از طرف دیگر اعداد اشیایی فضایی نیستند. فرگه معتقد است عینیت لزوماً هم‌بستهٔ خصیصهٔ فضایی‌داشتن و مکان‌مندبودن نیست. چنین نیست که هر عینی برای عینیت‌داشتن‌اش به

فضامندبودن محتاج باشد. عدد ٤ برای هر کس در هر جامعه‌ای و با هر فرهنگی همان عدد ٤ است.

عینیت علاوه‌بر مستقل‌بودن از فضامندی از داشتن ذهنی برای مدرک نیز مستقل است. مثلاً تصور کلمهٔ نوشته‌شدهٔ «طلا» بر روی کاغذ مستلزم به ذهن آمدن عدد ۳ نیست، اما اگر به تعداد حروف تشکیل دهندهٔ آن فکر کنیم عدد ۳ به ذهن می‌آید، ولی در تصویر ذهنی ما از واژهٔ طلا هیچ تغییری ایجاد نمی‌کند.

فرگه در مقدمهٔ *مبانی حساب* به سه اصل اشاره می‌کند که هر سهٔ آن‌ها در تصور او از اعداد به عنوان اعیان قائم بالذات نقش دارند: نخست تمایز منطق از روان‌شناسی، دوم اصل متن، و سوم تمایز صریح میان مفهوم و شیء.

تحاشی ذهنی ما در تلقی اعداد به عنوان اشیا و نه مفاهیم به اعتقاد فرگه از تمایل ما به پرسش از معنای کلمات به‌تنهایی و نه در متن یک جمله برمی‌خیزد. این تمایل ما را به جست‌وجوی یک تصویر به ازای معنای هر کلمه هدایت می‌کند و از نگاه فرگه این همان خلط میان منطق و روان‌شناسی است. در این صورت اگر نتوانیم تصویری معادل یک کلمه را در ذهن بیابیم از پذیرش وجود شیئی در عالم خارج به مثابهٔ مصداق آن کلمه سر باز می‌زنیم.

فرگه برای این‌که نشان دهد اعداد، اعیان قائم بالذات هستند باید نشان دهد که اعداد در یک گزاره مانند یک اسم خاص رفتار می‌کنند. آن‌ها معمولاً در گزاره‌ها به صورت صفت ظاهر می‌شوند. مثلاً مشتری چهار قمر دارد یا مشتری دارای چهار قمر است. اما هر گزارهٔ عددی را به این شکل نیز می‌توان نوشت: تعداد اقمار مشتری چهار است.

خصیصهٔ اصلی یک عین برای فرگه این است که عین دارای یک این‌همانی است که می‌تواند در اوضاع و احوال متفاوت، و بارها به عنوان همان و درست همان عین، شناخته شود. لذا مهم‌ترین استدلال او بر عینیت اعداد این است که آن‌ها می‌توانند در معادلات 1+1=2 به کار روند.

فرگه هر معادله را یک گزارهٔ راجع به این‌همانی می‌داند. عبارتی که دو علامت دو طرف تساوی را به عنوان دو اسم برای یک عین معرفی می‌کند. علامت تساوی (=) درست همان «است» در گزاره‌های زبان عادی است وقتی که مثلاً می‌گوییم «تعدا اقمار مشتری چهار است». اما اگر اعداد اعیان قائم بالذات باشند باید معیاری داشته باشیم که بر اساس آن تصمیم بگیریم که برای هر شیء b آیا b عدد هست یا نه. این همان معیار این‌همانی برای یک عین است. لذا باید معنای گزارهٔ زیر را مشخص کنیم:

«عدد متعلق به مفهوم F همان عدد متعلق به مفهوم G است» (Ferege, 1960: 73).

ما باید محتوای این گزاره را بدون استفاده از عبارت «عدد متعلق به مفهوم F» دوباره‌نویسی کنیم. این‌جاست که فرگه به اصل هیوم متوسل می‌شود. بنا به اصل هیوم می‌توانیم این همانی عددی را بر حسب یک تناظر یک‌به‌یک بین دو مفهوم تعریف کنیم. فرگه در این باره می‌گوید: «خیلی وقت پیش هیوم به ما یاد آوری کرد که وقتی دو عدد ترکیب می‌شوند به طوری که شخص همیشه پاسخ واحدی را به هر بخش واحدی از دیگری دارد ما آن‌ها را یک‌سان بیان می‌کنیم» (ibid).

عدد متعلق به مفهوم F همان عدد متعلق به مفهوم G است اگر و تنها اگر بین همهٔ مصادیق F و همهٔ مصادیق G تناظر یک‌به‌یک وجود داشته باشد. فرگه می‌خواهد مفهوم عدد را بر حسب این همانی عددی تعریف کند. به‌نظر خلاف شهود می‌آید که عدد را بر حسب هم‌عددبودن دو مجموعه تعریف کنیم. بیش‌تر تمایل داریم تا هم‌عددبودن را بر حسب عدد و تعریف آن بفهمیم، اما فرگه با مثالی منظورش را روشن‌تر می‌کند. می‌توان توازی دو خط را بر حسب هم‌جهت‌بودن آن‌ها تعریف کرد، اما در این صورت ما هیچ تصوری از «جهت خط a» نداریم. لذا بهتر است هم‌جهت‌بودن را بر حسب توازی دو خط تعریف کرد، زیرا هر کسی تصوری از دو خط موازی در ذهن دارد. فهم عرفی به ما می‌گوید که نخست باید تعریف یا تصوری از جهت a و جهت b داشته باشیم و سپس تعریفی کلی از مفهوم این‌همانی و آن‌گاه با در کنار هم گذاشتن آن‌ها «این‌همان‌بودن جهت a و جهت b» را درک کنیم. با جابه‌جاکردن تعریف یعنی تعریف «هم‌جهت‌بودن a و b» بر حسب توازی آن دو اولین سؤال این است که آیا این تعریف جدید به‌راستی درک کلی ما از این‌همانی را برآورده می‌کند یا نه؟

فرگه اصل تعویض‌پذیری حافظ الصدق لایب‌نیتس را برای معیار این‌همانی می‌آورد؛ بنا به این اصل می‌توانیم مطمئن باشیم تعریفمان از این‌همانی جهت دو خط بر اساس توازی آن دو واقعاً اصل لایب‌نیتس را برآورده می‌کند. با این حال مسئلهٔ دیگری ذهن فرگه را مشغول می‌کند و آن این که، این تعریف جدید از هم‌جهت‌بودن واقعاً نمی‌تواند ما را یاری کند تا بدانیم آیا انگلستان هم‌جهت با محور زمین هست یا نه؟ این تعریف یاری‌مان می‌کند که جهت a را به مثابهٔ یک عین بفهمیم و این‌همان‌بودن آن را با جهت خط b دریابیم، اما نمی‌تواند بگوید که آیا انگلستان هم‌جهت با یک خط هست یا نه.

جهت خط a این‌همان است با q

اگر ندانیم q جهت خطی هست یا نه تعریف ما از این‌همانی دو جهت هیچ کمکی نخواهد کرد، اما اگر از پیش بدانیم q جهت یک خط است می‌توانیم گزارهٔ فوق را تأیید یا تکذیب کنیم. ما هنوز نمی‌توانیم تعریفی از «جهت» ارائه دهیم مگر این‌که گرفتار دور شویم.

برای حل این مشکلات فرگه راه حلی پیشنهاد کرد که اهمیت فلسفی زیادی دارد؛ او متوجه شد که اگر خط a موازی خط b باشد آن‌گاه مصداق مفهوم موازی خط a با مصداق مفهوم موازی خط b یکی خواهد بود و برعکس، اگر همهٔ مصادیق این دو مفهوم یکی باشند آن‌گاه خط a و خط b با هم موازی هستند. بنابراین هنگامی‌که فرگه جهت خط a را به مصداق مفهوم «موازی با خط a» تعریف می‌کند، جهت خط را کلاس همهٔ خطوط موازی با آن درنظر گرفته است.

حال بنا به ملاحظات فوق فرگه تعریفی از عدد به این صورت ارائه می‌کند:

عدد متعلق به مفهوم F، مصداق مفهوم «هم‌توان با مفهوم F» است.

و دو مفهوم F و G هم‌توان هستند اگر تناظری یک‌به‌یک بین مصادیق آن‌ها برقرار باشد.

از آن‌جا که فقط یک مفهوم می‌تواند هم‌توان با مفهوم دیگر باشد، مصادیق مفهوم «هم‌توان با مفهوم F» یک کلاس از مفاهیمی هستند که همگی با F هم‌توان‌اند. لذا هر عدد کلاسی از همهٔ آن مفاهیمی است که تعداد مصادیقشان برابر با همان عدد است، لذا مثلاً عدد چهار هم‌کلاس همهٔ آن مفاهیمی است که در ویژگی چهارمصداقی‌بودن مشترک هستند و هم‌مصداق یک مفهوم مرتبهٔ بالاتر (یعنی خود مفهوم چهارتابودن). لذا فرگه فقط با تعریف مفهوم تناظر یک‌به‌یک و بدون افتادن در دور منطقی می‌تواند مفهوم عدد را تعریف کند. آگاهی از تناظر یک‌به‌یک می‌تواند مقدم بر آگاهی از عدد باشد و لزومی به پیش‌فرض گرفتن مفهوم عدد برای درک مفهوم تناظر یک‌به‌یک وجود ندارد؛

اگر هر شیئی که تحت مفهوم F قرار می‌گیرد در رابطهٔ Φ با شیئی که تحت مفهوم G قرار می‌گیرد باشد و اگر به هر شیئی که تحت مفهوم G قرار می‌گیرد یک شیء که تحت مفهوم F قرار می‌گیرد با رابطهٔ Φ مربوط باشد آن‌گاه همهٔ اشیایی که تحت مفهوم F قرار می‌گیرند با همهٔ اشیایی که تحت مفهوم G قرار می‌گیرند با رابطهٔ Φ با هم متناظر هستند.

این البته فقط رابطهٔ تناظر است. برای یک‌به‌یک بودن یک تناظر فرگه تعریف زیر را ارائه می‌کند:

اگر d با a رابطهٔ Φ داشته باشد و d با e رابطهٔ Φ داشته باشد آن‌گاه a=e. اگر d با a رابطهٔ Φ داشته باشد و b با a رابطهٔ Φ داشته باشد آن‌گاه d=b.

لذا فرگه مفهوم تناظر یک‌به‌یک را صرفاً بر اساس اصطلاحات منطقی تعریف می‌کند و از آن طریق می‌تواند هم‌توانی دو مفهوم را بر حسب وجـود یـک تنـاظر یـک‌بـه‌یـک بـین مصادیق آن دو مفهوم تعریف کند. حال همه‌چیز برای تعریف زیر آماده است:

عدد متعلق به مفهوم F مصداق مفهوم «هم‌توان با مفهوم F» است.

لذا n یک عدد است به این معناست که مفهومی مانند F وجود دارد که n عدد متعلق به مفهوم F است. پیش از این که فرگه به تعریف اعداد جزئی بپردازد، اثبات می‌کند کـه عـدد متعلق به مفهوم F برابر با عدد متعلق به مفهوم G است اگر مفهوم F هم‌توان باشد با مفهـوم G (در این‌جا از آوردن اثبات صرف‌نظر شده است).

تعریف کلی اعداد بر حسب کلاس‌های هم‌ارزی مفاهیم هم تـوان راه را بـرای تعریـف اعداد جزئی باز می‌کند؛ کافی است برای هر کلاس هم‌ارزی یک مفهوم را به مثابهٔ نماینـدهٔ آن کلاس درنظر بگیریم. مثلاً عدد ۹، کـلاس هـم‌ارزی همـهٔ مفـاهیم هـم‌تـوان بـا مفهـوم «سیارات منظومهٔ شمسی» است.

اما توسل به یـک مفهـومماننـد «سـیارات منظومـهٔ شمسـی» نـاقض هـدف فرگـه در فروکاهیدن حساب به منطق است، زیرا این‌که ۹ سیاره در منظومهٔ شمسی وجود دارد هـیچ ربطی به منطق ندارد. به علاوه، دشوار به‌نظر می‌رسد که معادل هر عدد در سلسلهٔ نامتنـاهی اعداد طبیعی یک مفهوم تجربی بیابیم. لذا فرگه دوباره به دستور لایب‌نیـتس بـرای سـاختن اعداد از روی صفر و یک و «مفهوم به علاوهٔ یک» متوسل می‌شود.

عدد متعلق به مفهوم «غیر این‌همان با خود» است. لذا عدد صفر کلاس همـهٔ مفـاهیمی است که هیچ مصداقی ندارند. البته برای اجتناب از این شبهه که ما دوباره از «هیچ» به جای صفر استفاده کرده‌ایم صورت‌بندی زیر را پیشنهاد می‌کند:

برای هر x، x هرچه می‌خواهد باشد، چنین نیست که x با خودش این‌همان نباشد. البته بررسی این نکته که همهٔ آن مفاهیمی که هیچ مصداقی ندارنـد هـم‌ارز هسـتند و لـذا یـک کلاس هم‌ارزی تشکیل می‌دهند بنا به تعریف هم‌توانی چندان دشوار نیست.

حال اگر ۱ را عدد متعلق به مفهوم «این‌همان با صفر» تعریف کنیم داریم:

مفهومی وجود دارد، این‌همان با صفر، که دارای یک مصداق است، یعنی خود صفر، به قسمی که عدد متعلق به این مفهوم ۱ است و عدد متعلق به مفهوم «این‌همان با صفر و غیـر این‌همان با صفر» صفر است.

لذا بنا به تعریف تالی،۱ تالی صفر است. یعنی ۱ بلافاصله بعد از صفر در سری اعداد قرار می‌گیرد. بنابراین فرگه هر عدد را به صورت زیر تعریف می‌کند:

• عدد متعلق به مفهوم نااین‌همان با خود است؛

۱ عدد متعلق به مفهوم این‌همان با صفر است؛

۲ عدد مفهوم این‌همان با صفر یا ۱ است؛

۳ عدد مفهوم این‌همان با صفر، ۱، یا ۲ است.

برای آن‌که نشان دهیم این الگو می‌تواند کل سری بی‌پایان اعداد را تولید کند باید اثبات کنیم که بعد از هر عدد در سری اعداد طبیعی عدد دیگری می‌آید و درنتیجه سری اعداد نامتناهی است. برای این منظور فرگه به تعریف رابطهٔ نیایی (ancestral relation) زیر می‌پردازد:

با فرض وجود رابطهٔ Φ می‌توانیم رابطهٔ دیگری را به صورت زیر تعریف کنیم؛

y در سری Φ به دنبال x می‌آید یا x در سری Φ پیش از y می‌آید.

مثلاً برحسب رابطهٔ پدربودن = Φ می‌توان نوه‌بودن یا جدبودن را تعریف کرد. فرگه برای رسیدن به این تعریف نخست مراحل زیر را طی می‌کند:

ویژگی p را در سری Φ موروثی گوییم هرگاه برای هر d اگر p به d متعلق باشد آن‌گاه p به هر عضو سری که با d رابطهٔ Φ دارد نیز تعلق داشته باشد.

y در سری Φ بعد از x می‌آید هرگاه دارای هر ویژگی Φ–موروثی باشد که x داراست.

برای این‌که از رابطهٔ نیایی برای تولید سری اعداد استفاده کنیم باید رابطهٔ Φ را رابطهٔ تالی بلافصل، که پیش‌تر تعریف کرده‌ایم، درنظر بگیریم.در این مورد سری Φ ما سری اعداد طبیعی خواهد بود. لذا y در سری اعداد طبیعی بعد از x می‌آید هرگاه دارای همهٔ آن ویژگی‌هایی باشد که به هر تالی بلافصل x متعلق‌اند و روی سری اعداد طبیعی موروثی‌اند.

حال فرگه مفهوم «عضو سری اعداد طبیعی مختوم به n» را تعریف می‌کند: a مصداق این مفهوم است اگر a=n یا n در سری اعداد طبیعی بعد از a بیاید. می‌توان نشان داد که عدد متعلق به این مفهوم در سری اعداد طبیعی بلافاصله بعد از n قرار می‌گیرد. بنابراین برای هر n عددی وجود دارد که بلافاصله بعد از n می‌آید، لذا سری اعداد طبیعی نامتناهی است.

¬۸ درنهایت فرگه «n عددی متناهی است» را این‌گونه تعریف می‌کند: n به سری اعداد طبیعی آغازشده از صفر تعلق دارد.

فرگه در پایان *مبانی حساب* پروژهٔ خود را چنین جمع‌بندی می‌کند:

«من امیدوارم توانسته باشم در کار حاضر نشان دهم که قوانین حساب احکامی تحلیلی هستند و نتیجتاً پیشینی. بنابراین حساب به طور ساده‌ای توسعه‌ای از منطق می‌شود و هر گزارهٔ حساب قانونی از منطق ولو این‌که گزاره‌ای استنتاجی باشد. به‌کارگیری حساب در علوم فیزیکی، مرتبط‌کردن منطق با واقعیات مشاهده‌شده است که نتیجهٔ آن یک قیاس است. ... بنابراین قوانین اعداد واقعاً برای چیزهای خارجی قابل استفاده نیستند، آن‌ها قوانین طبیعت نیستند ... آن‌ها قوانین قوانین طبیعت هستند» (ibid: 99).

۴. پروژهٔ منطق‌گرایی در ریاضیات

رویکرد منطق‌گرایی در مبانی ریاضیات را فرگه آغاز کرد و سپس برتراند راسل (Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) و نورث وایتهد (Alfred North Whitehead (1861-1947))، و به‌طور ویژه در کتاب *اصول ریاضیات* (*Principia Mathematica*)، آن را به صورت یک برنامهٔ عملی درآوردند. از نظر راسل هدف این برنامه «نشان‌دادن این است که همهٔ ریاضیات محض از فرض‌های منطقی صرف نتیجه می‌شود و فقط از مفاهیم منطقی قابل تعریف در واژگان منطقی استفاده می‌کند» (Russel, 1959: 74). منطق‌گرایان در اثبات تحلیلی‌بودن علم حساب، به یک‌سری تبدیل علایم احتیاج داشتند. راسل در مقدمهٔ *اصول ریاضیات* می‌گوید: «بدون کمک نمادهای منطقی ما قادر نبودیم استدلال‌های لازم را صورت ببخشیم. توسعهٔ نمادهای منطقی نتیجهٔ کاری واقعی و عملی است و نه روشی ناهنجاری که فقط به سبب نوعی نمایش جدید معرفی شده است» (Russel, 1910: viii). درواقع کاری که راسل کرد ایجاد «منطقی از حساب محمولات و گزاره ها بود. علاوه بر آن منطقی از روابط (محمول‌های بیش از یک متغیر) نیز به وجود آورد. او فکر می‌کرد که «همهٔ» ریاضیات، نه‌فقط روش های استدلال‌کردن، بلکه حتی اشیای ریاضی، از چنین مبادی‌ای نتیجه می‌شود» (Griffin, 2003: 51).

برنامهٔ منطق‌گرایی در ریاضیات دارای مراحلی بود؛ در مرحلهٔ اول تبدیل علایم الفاظ و در حالت ترکیبی احکام نمادین‌شدهٔ صرفاً منطقی بودند. مثلاً متغیرهای گزاره‌ای با نمادهای ... ,p, q, r, s, t و علامت عطف با $\wedge$ و علامت فصل با $\vee$ و علامت سلب با $\neg$ نشان داده می‌شدند. ولی احکام نمادین‌شده شامل علایمی بودند که ظاهراً منطقی‌بودن آن‌ها ضروری نبود و فقط پس از اقامهٔ براهین، منطقی‌بودن آن‌ها اثبات می‌شد. پس در یکی از مراحل اثبات

تبدیل علایم منطقی صرف به علایم دیگر صورت می‌گرفت. در این مرحله تعریف، و حد منطقی نقش مهمی ایفا می‌کردند و در این‌جا اساسی‌ترین تمایز داخلی در نظام منطق گرایی ریاضیات، یعنی نظریهٔ فرگه از یک سو و نظریهٔ راسل از سوی دیگر، خود را نشان مـی‌داد. نظریهٔ فرگه دربارهٔ تعریف و حد منطقی، نظریه‌ای واقع‌گرا بود یعنی حد منطقی را قولی که دلالت بر ماهیت بکند می‌دانست و درنتیجه قائل به ماهیت قابل اشاره برای اشیای ریاضـی معرف آن‌ها بود. در حالی که نظریهٔ راسل نظریه‌ای نام‌گرا بود یعنی تعریف را صـرفاً بیـانی برای ترکیب جدیدی از علایم بر مبنای ترکیبی از پیش شناخته‌شده می‌دانسـت. بنـابراین از نظر او تعریف دلالت بر چیزی نمی‌کرد، بلکه در مراحل اثبات تسهیل ایجـاد مـی‌کـرد. بـر مبنای چنین نظریه‌ای تعریف نوعی اختصار در بیان مطالـب دانسـته مـی‌شـد. بـرای نمونـه تعریف یک عدد خاصی (مثلاً وقتی می‌گوییم یگانه عددی که فـلان خاصـیت را دارد)، بـا یک طبقه از اعداد (مثلاً طبقهٔ اعداد صحیح تقسیم‌پذیر بر دو) بیانی است از چیزهایی صرفاً منطقی، غیر مادی، و ذهنی. نظر راسل در این مورد پیروان زیادی ندارد و موضع حـادی از منطق‌گرایی است، اما بینش فرگه که از نظر فلسفی عمیق‌تر است طرف‌داران بسیاری دارد.

منطق‌گرایان در برنامهٔ خود برای بازسازی ریاضی بر اساس منطق همواره از گزاره‌هـای صادق استفاده می‌کردند. به عبارت دیگر گزاره‌های همواره صادق با همان‌گویی‌های منطقی در برنامهٔ منطق‌گرایان مقدمات مسلم براهین بودند. چنین گزاره‌هایی از طریق بررسی توابـع ارزش (truth functions) به دست مـی‌آینـد. مـثلاً تـابع ارزش $\mathcal{T}(P1, P2, \dots, Pn)$ منطقـاً ضروری است اگر و تنها اگر ارزش آن در ازای ارزش‌های متفاوت $P1, P2, \dots, Pn$ همواره صادق باشد. ارزش توابع منطقاً ضروری در برنامهٔ منطق‌گرایی کاملاً مشهود است، زیرا طبقهٔ توابع ارزش همواره صادق تعریف شده است و از طریق شیوه‌ای مکانیکی می‌توان آن‌ها را شناخت. اما باید به این نکته توجه کرد که در ساختن ریاضیات بر اساس منطق احتیـاج بـه مقدمات دیگری نیز هست و در این‌جاست که ضعف برنامهٔ منطق‌گرایی آشـکار مـی‌شـود. برای روشن‌شدن مطلب به شیوهٔ مورد استفاده راسل در کتـاب معـروف *اصـول ریاضـیات* اشاره می‌کنیم.

راسل در ابتدا از مجموعه‌ای مثلاً S که علم بدان داریم آغاز مـی‌کنـد. در ابتـدا شـواهد چنین اقتضا می‌کنند که S را قبول کنیم ولی با مشکلات زیر مواجه می‌شویم:

– ادعاهای مربوط بـه شـناخت S را نمـی‌تـوان بـه‌سـهولت قبـول کـرد. مـثلاً آیـا $\forall a, \forall b : a, b \in S$ درست است؟

– مسائل حل‌ناشـده در S وجـود دارنـد. مـثلاً آیـا $\forall a, a \in S, \exists e : a.e = e.a$ درست است؟

– دربارهٔ وجود عناصر نمی‌توان تصمیم قاطع گرفت. مثلاً آیا $\forall a, a \in S, \exists b, b \in S \rightarrow a.b = b.a = e$ درست است؟

شیوهٔ راسل به گونه‌ای است کـه در چنـین مـواردی S را بـر مبنـای مجموعـهٔ از پـیش بیان‌شده درنظر می‌گیرد و بنا می‌کند. مثلاً S را در برابر یک گروه آبلی G بیان می‌کند.

اما اشکال عمدهٔ راسل در وجود بی‌نهایت است؛ آیا باید وجـود بـی‌نهایـت ریاضـی را بدیهی بدانیم؟ و برای آن موقعیتی شبیه اصول بدیهی منطق هم‌چون فصل و عطـف درنظـر بگیریم؟ یا این‌که باید وجود بی‌نهایت را به مثابهٔ یک اصل موضوعه در ساختمان ریاضیات بپذیریم؟ راسل هر دو کار را کرد. در چاپ اول *اصول ریاضیات* وجود بی‌نهایت را اصـلی بدیهی پذیرفت و در چاپ دوم همان کتاب وجود بی‌نهایت را به مثابهٔ اصل موضوع درنظر گرفت. در هردوی این حالت‌ها منطق‌گرایی با اشکال روبه‌رو است، چه اگر ریاضیات تماماً متأخر بر منطق و منتج از آن باشد باید در ساختمان ریاضی در هیچ مرحلهٔ تعقـل شـهودی موضوع مدرک دخالتی نداشته باشد. اما چگونه می‌توان بی‌نهایت را صرفاً بر مبنـای منطـق شناخت؟ با تأمل در این پرسش‌ها می‌بینیم که استفادهٔ بدون دقت و تعمق کافی از بی‌نهایت ریاضی در ساختارهای ریاضی توسط راسل و فرگه، ضعفی اساسـی در فلسـفهٔ ریاضـیات منطق‌گراست.

حال ببینیم که آموزهٔ اصلی مکتب منطق‌گرایی، که منطق را نه آلت و شیوه‌ای در دسـت ساختار ریاضیات، بلکه مولد و اصل ساختار می‌داند و ریاضیات را قابل استخراج و استنتاج از منطق، چگونه در عمل به کار گرفته می‌شود. کارناپ معتقد است که ما می‌تـوانیم آمـوزهٔ منطق‌گرایی را در دو بخش مورد بررسی قرار دهیم:

آموزهٔ اول: مفاهیم ریاضیات را می‌توان از مفاهیم منطقی و بـه وسـیلهٔ تعـاریف صـریح استخراج کرد؛

آموزهٔ دوم: قضایای ریاضی را می‌توان از اصول متعارف منطقی و به وسیلهٔ قیاس منطقی ناب استخراج کرد (Carnap, 1983: 41).

۱.٤ آموزهٔ اول

از آن‌جا که ریاضی‌دانان بر این نکته واقف بودند که علم حساب قابل تجزیه به اعداد طبیعی

است بنابراین مسئلهٔ مهم در بخش اول این بودکه بتوان اعداد طبیعی را از مفاهیم منطقی استنتاج کرد. گرچه فرگه قبلاً راه حلی برای این مسئله یافته بود، راسل و وایتهد مستقل از او و با روشی دیگر به همان نتایج رسیدند. آموزهٔ اصلی این راه حل تشخیص صحیح حالت منطقی اعداد طبیعی بود؛ نسبت‌هایی منطقی که نه به اشیا، بلکه به مفاهیم تعلق داشتند. مثلاً ۳، مجموعهٔ تمام مفاهیمی است که فقط سه شیء تحت آن ها قرار می‌گیرند. حال این مطلب را می‌توان به کمک مفاهیم منطقی به شکل ذیل بیان کرد:

فرض کنید معنای $2_m(f)$ این است که لااقل دو شیء در تحت مفهوم f واقع می‌شوند. پس می‌توانیم این مفهوم را چنین تعریف کنیم:(D_f نمادی به جای تعریف است و خوانده می‌شود «بنا به تعریف یعنی آن‌که»):

$$2_m(f)=Df\quad (\exists x)(\exists y)[\neg(x = y)\wedge f(x)\wedge f(y)]$$

یعنی xی وجود دارد و yی وجود دارد به طوری که x با y این‌همان نیست و f به x تعلق دارد و f به y تعلق دارد. به همین طریق می‌توان 3_m و4_m و 5_m و ... را نیز تعریف کرد. آن‌گاه عدد ۲ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$2(f)=Df\ 2_m(f)\wedge\neg 3_m(f)$$

یعنی لااقل دو و نه لااقل سه شیء در تحت f اند. بدین‌گونه می‌توانیم عمل‌گرهای حساب را به‌سادگی تعریف کنیم. مثلاً جمع را با انفصال دو مفهوم دو به دو مانعة الجمع بیان کنیم. بنابراین با این روش می‌توان تمام اعداد طبیعی را ساخت. اعداد مثبت و منفی، کسرها، و اعداد حقیقی را نیز می‌توان ساخت، اما نه با افزودن به اعداد طبیعی، بلکه با ساختن قلمرو به کلی جدید دیگری. اعداد طبیعی زیر مجموعه‌ای از کسرها را تشکیل نمی‌دهد، بلکه با برخی کسرها هم‌بسته‌اند؛ یعنی عدد طبیعی ۳ و 3/1 برابر نیستند بلکه فقط با هم دیگر هم‌بسته‌اند. به همین شکل باید میان کسر ½ و عدد حقیقی نظیر آن نیز تمایز قائل شد. از آن‌جا که ساختن اعداد حقیقی منطق گرایی را با مشکلاتی مواجه می‌کند از این رو در ادامه فقط به ساختن این نوع اعداد می‌پردازیم.

بدین منظور فرض می‌کنیم اعداد کسری (گویا) را ساخته‌ایم و حال می‌خواهیم اعداد حقیقی را بر مبنای این اعداد بسازیم. همان‌طور که می‌دانیم برخی از اعداد حقیقی با اعداد گویا نظیر هستند. در این میان همان‌طور که دده کیند (Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916))[۲] در ۱۸۷۲ نشان داد اعداد گنگ، به مثابهٔ رخنه هایی در سلسلهٔ اعداد گویا هستند. فرض کنید که اعداد گویای مثبت را به دو طبقه تقسیم کنیم: طبقهٔ اول اعدادی که

مجذورشان کم‌تر از ۲ است (مجموعهٔ کران پایینی) و طبقهٔ دیگر بقیهٔ اعـداد گویـا را دربـر می‌گیرد (مجموعهٔ کران بالایی). چنین تقسیمی برشی در اعداد گویا به وجود مـی‌آورد کـه با عدد حقیقی $\sqrt{2}$ نظیر است. این «برش» را «رخنه» می‌نامیم، زیرا با هیچ عدد گویایی نظیر نیست. چون هیچ کسری نیست که مجذورش ۲ باشد. پـس طبقـهٔ اول دارای بـزرگ‌تـرین کران بالایی که به خودش متعلق باشد نیست. همچنین طبقهٔ دوم هـم دارای کوچـک‌تـرین کران پایینی نیست. بنابراین متناظر با هر عدد حقیقی برشی در سلسلهٔ اعداد گویا وجود دارد و هر عدد حقیقی اصم با یک رخنه متناظر است.[۳]

راسل اندیشهٔ دده کیند را ادامه داد. از آن‌جا که هر برش به طور یکتایی با مجموعهٔ کران پایینی خود مشخص می‌شود، راسل یک عدد حقیقـی را بـه مثابـهٔ مجموعـهٔ کـران پـایینی نظیرش در اعداد گویا تعریف کرد. مثلاً $\sqrt{2}$ با مجموعه‌ای از اعداد گویـا کـه مجذورشـان کم‌تر از ۲ است تعریف می‌شود و عدد حقیقی گویای 1/3 با مجموعهٔ کران‌های پـایینی 1/3 تعریف می‌شود.

کارناپ معتقد است که نکتهٔ مهم در این شیوهٔ ساختن اعداد حقیقی این است که آن‌هـا اصول موضوعه نیستند، بلکه ساخته شده‌اند. «منطق‌گرا وجود ساختمان‌هایی را که خـواص اعداد حقیقی داشته باشند با طرح اصول متعارف یا اصول موضوعه استوار نمی‌کند، بلکه از طریق تعارف صریح، بناهای منطقی‌ای فراهم می‌کند که به علت این تعاریف دارای خواص اعداد حقیقی‌اند. از آن‌جا که هیچ تعریف خلاقی وجود ندارد، تعریف آفرینش نیست، بلکه فقط نام‌گذاری چیزی است که وجود آن قبلاً محرز شده اسـت و ایـن یکـی از مشـکلاتی است که مکتب منطق‌گرایی با آن مواجه است» (ibid: 44).

منطق‌گرایان به همین نحـو سـعی داشـتند بقیـهٔ مفـاهیم ریاضـی مثـل حـد، پیوسـتگی، دیفرانسیل، خارج‌قسمت، انتگرال، و اعداد اصلی و ترانسفینی در نظریهٔ مجموعه‌ها را بسازند.

۲.٤ آموزهٔ دوم

بنابر این آموزه، قضایای ریاضیات از اصول متعارف منطقی به کمـک قیـاس منطقـی قابـل استنتاج هستند. دستگاه اصول متعارف منطقی راسل شامل چهار اصل متعـارف از حسـاب گزاره‌ای و دو اصل از حساب تابعی است. قواعد استنتاج عبارت‌اند از قاعـدهٔ جـایگزینی و قاعدهٔ استلزام. از آن‌جا که هر حکم یا جملهٔ ریاضی را می‌توان به جمله‌ای ترجمه کرد کـه فقط شامل محمولات اولیهٔ منطقی باشد، پس می‌توان این آموزه را چنین نیز بیان کـرد: هـر

جمله قابل اثبات ریاضی قابل ترجمه به جمله‌ای است که فقط شامل نمادهای اولیهٔ منطقی بوده و در منطق قابل اثبات باشد.

اما استنتاج قضایای ریاضی برای منطق‌گرایی مشکلات خاصی را پیش آورد:

اولاً، برای اثبات برخی قضایای حساب و نظریهٔ مجموعه ها علاوه‌بر اصول متعارف منطقی نیازمند اصول متعارف دیگری هم چون اصل متعارف بی‌نهایت و اصل متعارف انتخاب هستند. بنابر اصل متعارف بی‌نهایت برای هر عدد طبیعی، عددی بزرگ‌تر از آن وجود دارد. حکم اصل متعارف انتخاب (axiom of choice) نیز این است. برای هر مجموعهٔ غیر تهی S که عنصرهایش مجموعه‌های غیر تهی هستند یک تابع

$-f: S \to \cup A; A\in \varphi$

به نام تابع انتخاب وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $A\in S$ داریم $f(A)\in A$

به عبارت دیگر برای هر مجموعه جدا از هم و ناتهی از مجموعه‌ها، لااقل یک مجموعهٔ انتخاب وجود دارد یعنی مجموعه‌ای که با هریک از مجموعه‌های عضو، دقیقاً در یک عضو مشترک است. هر دوی این احکام وجودی‌اند، لذا راسل حق داشت که در عرضهٔ آن‌ها به مثابهٔ اصول متعارف منطقی تعلل ورزد، زیرا منطق سروکارش فقط با هستی‌های ممکن است و نمی‌تواند هیچ ادعایی در مورد وجود و عدم چیزی داشته باشد. راسل راهی برای گریز از این مخمصه یافت؛ او چنین دلیل آورد که چون ریاضیات علم صوری محض است پس در مورد وجود فقط می‌تواند اظهار نظر شرطی بکند نه جازم. اگر برخی ساختارها وجود داشته باشند آن‌گاه برخی ساختارهای دیگر هم وجود دارند که وجود آن‌ها منطقاً از وجود قبلی ها تبعیت می‌کنند. بدین‌گونه او یک حکم ریاضی مانند S را که اثباتش مقتضی اصل متعارف بی‌نهایت I یا اصل متعارف انتخاب C بود به حکمی شرطی تحویل کرد. یعنی به جای صحبت از S از $I\to S$ یا $C\to S$ صحبت می‌کنیم. در این صورت این جملات، جملاتی شرطی هستند که از اصول منطق قابل استنتاج‌اند.

ثانیاً، اشکال بزرگ‌تر بر منطق‌گرایی که شاید بتوان آن را بزرگ‌ترین اشکال نیز دانست مربوط به اصل متعارف تحویل‌پذیری (axiom of reducibility) است که راسل آن را در *اصول ریاضیات* مطرح کرد. برای بیان این‌که چرا راسل مجبور شد تا این اصل را بیاورد لازم است تا اشاره‌ای هرچند کوتاه و مجمل به نظریهٔ انواع وی کنیم.

برای سهولت فقط توابع یک‌موضعی را درنظر می‌گیریم. در این صورت نظریهٔ انواع متشکل است از طبقه‌بندی زیر از اظهارات:

نام اشیا (افراد) قلمرو بحث، مثلاً ... ,a, b, c متعلق به نوع o هستند. در نوع ۱ خواص این اشیا مثلاً ... ,f(a), g(b), h(c) قرار دارند؛ در نوع ۲ خواص این خواص یعنی ... ,F(f), G(g), H(h) قرار دارند؛ در نوع ۳ خواص خواص خواص اشیا قرار دارند؛ و قس علی هذا. قاعدهٔ اصلی نظریهٔ انواع این است که هر محمولی متعلق به یک نوع مشخص است و به کاربردن آن فقط در نوع بعدی پایین‌تر معنی دارد. بنابراین جملاتی از قبیل f(a) و F(f) همواره بامعناست یعنی یا درست یا نادرست هستند. از طرفی دیگر ترکیباتی نظیر f(g) و f(F) نه درست‌اند و نه نادرست، بلکه بی‌معنا هستند. به خصوص عبارتی مانند f(f) و ¬f(f) بی‌معنایند؛ یعنی معنا ندارد بگوییم که یک خاصیت متعلق به خودش است یا متعلق به خودش نیست. اهمیت این قاعده در رفع تضادهاست.

نظریه‌ای که در بالا بیان شد نظریهٔ سادهٔ انواع است که منطقیون جدید اغلب آن را موجه و ضروری می‌دانند، اما راسل نظریهٔ انشقاق انواع را نیز بیان کرد که مقبولیت چندانی نیافت. در این نظریه خواص هر نوع به نوبهٔ خود تقسیم به «مرتبه» (order) هایی می‌شوند. این انقسام مبتنی‌بر صورت تعریفی است که آن را معمول می‌کند و نه بر اشیایی که این خاصیت به آن‌ها متعلق است. در کار آوردن این نظریه سبب بروز اشکالاتی در ساختار ریاضی به ویژه اعداد حقیقی شد. بسیاری از قضایای اساسی نه‌تنها قابل اثبات نبودند، قابل بیان هم نبودند. برای فائق آمدن بر این مشکل راسل مجبور شد اصل جدیدی به نام اصل تحویل‌پذیری را بیان کند. بنا بر این اصل مراتب متفاوت یک نوع به نحوی قابل تحویل به مرتبهٔ پایین‌تر از این نوع بودند. جالب این است که یگانه ملاک حقیقت این اصل متعارف آن بود که هیچ راه چارهٔ دیگری برای گریز از این مشکل که معلول نظریهٔ انشقاق انواع بود وجود نداشت. البته بعدها راسل تحت تأثیر انتقادات دقیق ویتگنشتاین در چاپ دوم *اصول ریاضیات* (۱۹۲۵) از این اصل اجتناب کرد، اما چون هنوز معتقد بود که بدون نظریهٔ انشقاق انواع کاری از پیش نمی‌رود از این موقعیت قطع امید کرد. «بنابراین می‌بینیم که نه‌فقط برای منطق گرایی، بلکه برای هر کوشش دیگری جهت حل مسئلهٔ مبانی ریاضیات نشان‌دادن این مطلب که، نظریهٔ سادهٔ انواع برای ساختن ریاضیات بیرون از منطق کافی است، چقدر مهم است» (ibid: 46).

۳.٤ مسئلهٔ تعریف غیر اسنادی (impredicative)

برای حصول اطمینان از این‌که آیا نظریهٔ سادهٔ انواع کافی است یا آن‌که باید انشقاق

بیش‌تری بیابد لازم است ابتدا به این پرسش پاسخ دهیم که چرا راسل مجبور شد نظریهٔ انشقاق انواع را مطرح کند. علت نخست این بود که وی می‌خواست از پارادوکس‌های منطقی، مانند پارادوکس مجموعه‌ها، بپرهیزد. پارادوکس‌های منطقی به پارادوکس‌هایی گفته می‌شود که اولین‌بار در نظریهٔ مجموعه‌ها ظاهر شد و راسل نشان داد که در تمام منطق نیز وجود دارند. می‌توان نشان داد که اگر نظریهٔ انواع را پیشاپیش نپذیریم این پارادوکس‌ها در منطق به وجود می‌آیند. ساده‌ترین پارادوکس به مفهوم غیر اسنادی مربوط است. بنا به تعریف خاصیتی را غیر اسنادی گوییم اگر متعلق به خودش نباشد. حال آیا خاصیت غیر اسنادی، خود غیر اسنادی است؟ اگر فرض کنیم که باشد آن‌گاه چون متعلق به خودش است بنا به تعریف غیر اسنادی، خودش غیر اسنادی نیست و اگر فرض کنیم که غیر اسنادی نباشد آن‌گاه متعلق به خودش نیست و بنا به تعریف غیر اسنادی، خودش غیر اسنادی است. بنا به قانون طرد شق ثالث، یا غیر اسنادی است یا نیست، و لذا با یک تناقض مواجه‌ایم.

نمونهٔ دیگری از این پارادوکس‌ها، پارادوکس گرلینگ دربارهٔ مفهوم ناهمگون (heterological) است؛ این پارادوکس شبیه پارادوکس فوق است با این تفاوت که تناقض منتج‌شده راجع به محمولات است نه خواص. بنا به تعریف محمولی را ناهمگون گوییم که خاصیت به وسیلهٔ محمول تعیین‌شده متعلق به خود محمول نباشد. مثلاً واژه تک‌هجایی ناهمگون است، زیرا خود واژه تک‌هجایی نیست. واضح است که هر دوی این فرض‌ها که واژه ناهمگون خودش ناهمگون است و فرض مخالف آن منجر به تناقض می‌شوند. راسل و منطق‌دانان دیگر پارادوکس‌های بسیاری شبیه این نوع پارادوکس‌ها ساختند.

رمزی نشان داد که دو نوع متفاوت از پارادوکس‌ها وجود دارند؛

– پارادوکس‌های نوع اول به شکلی کامل در منطق قابل بیان هستند و پارادوکس‌های منطقی نامیده می‌شوند. پارادوکس غیر اسنادی از این نوع است و با نظریهٔ سادهٔ انواع قابل حل هستند، زیرا اگر نظریهٔ انواع را بپذیریم مفهوم غیر اسنادی حتی قابل تعریف نیست، زیرا عباراتی از این دست که خاصیتی متعلق به خودش نیست یعنی $\neg f(f)$ بنا به این نظریه خوش تعریف نیست و بی‌معناست.

– پارادوکس‌های نوع دوم به پارادوکس‌های معناشناختی (semantical) یا شناخت‌شناسانه (epistemological) معروف‌اند. مثال مفهوم ناهمگون از این نوع است.

نمونهٔ دیگری از این پارادوکس‌ها که در میان ریاضی‌دانان معروف است مربوط به کوچک‌ترین عدد طبیعی است که به آلمانی با کم‌تر از صد حرف قابل تعریف نیست.

این نوع پارادوکس‌ها که در زبان گفتاری پیش می‌آیند راسل را بر آن داشت تا با وضع برخی محدودیت‌ها برای منطق، هم‌چون طرح نظریهٔ انشقاق انواع، آن‌ها را از میان بردارد و این سبب شد. با وجود این، رمزی نشان داد پارادوکس‌هایی از این دست در زبان نمادین منطق قابل ساخت نیستند و لذا لازم نیست در پروژهٔ ساختن ریاضیات از منطق به آن‌ها اعتنا کنیم. پس نظریهٔ انشقاق انواع و متعاقب آن اصل متعارف تحویل پذیری زائد است (Ramsey, 1926: 62-65).

٤.٤ مشکلات نظریهٔ انشقاق انواع

نظریهٔ انشقاق انواع سبب بروز مشکلات بزرگی در مورد اعداد حقیقی شد. همان‌طور که دیدیم هر عدد حقیقی به عنوان یک طبقه به مثابهٔ یک خاصیت از کسرها تعریف می‌شود. مثلاً $\sqrt{2}$ به طبقه‌ای از همهٔ کسرهایی تعریف می‌شود که مجذور آن‌ها کم‌تر از ۲ است، اما چون عبارت «برای همهٔ خواص» بدون رجوع به یک مرتبهٔ مشخص در تحت نظریهٔ انشقاق انواع قابل قبول نیست، بنابراین «برای همهٔ اعداد حقیقی» بدون هیچ توصیف دیگری رجوع به همهٔ اعداد حقیقی نمی‌تواند باشد و فقط رجوع به اعداد حقیقی مربوط به مرتبهٔ مشخصی می‌تواند باشد. به مرتبهٔ اول، اعداد حقیقی تعلق دارند که در تعریف آن‌ها عبارتی به صورت «برای همهٔ اعداد حقیقی» ظاهر نمی‌شوند. به مرتبهٔ دوم آن‌هایی تعلق دارند که در تعریفشان چنین عبارتی به نمایش درمی‌آید، اما این عبارت باید به «همهٔ اعداد حقیقی از مرتبهٔ اول» محدود شود و غیره. پس نه تعریف مقبولی و نه جملهٔ مقبولی می‌تواند دربارهٔ همهٔ اعداد حقیقی، بدون قید و شرط، باشد.

در نتیجهٔ این انشقاق تعداد کثیری از مهم‌ترین تعاریف و قضایای نظریهٔ اعداد حقیقی از دست می‌روند. زمانی راسل دریافت که کوشش وی برای غلبه بر مسئلهٔ اصل متعارف تحویل‌پذیری خود قابل قبول نیست که دیگر چاره‌ای برای رهایی از این معضل به خاطرش خطور نکرد. درواقع بزرگ‌ترین مشکلی که پروژهٔ منطق‌گرایی با آن روبه‌رو بود عبارت بود از این‌که «چگونه می‌توان منطق را توسعه داد اگر از یک طرف بخواهیم از خطر بی‌معنابودن تعریف غیر اسنادی برهیم و از طرف دیگر به طرزی اقناع‌کننده نظریهٔ اعداد حقیقی را تجدید بنا کنیم» (ibid: 49).

۵. نتیجه‌گیری

همان‌طور که دیدیم منطق‌گرایی از تلاش برای تعمیق هرچه بیش‌تر مبانی ریاضیات ناشی شد. درواقع این آموزه نتیجهٔ گرایش به روش اصل موضوعی در ریاضیات است. چنین رویکردی به منطق و ریاضیات واکنشی به نظریهٔ کانت در این باره بود که ریاضیات از مقولهٔ ترکیبی پیشینی است. بولتزانو از اولین کسانی بود که به این موضوع واکنش نشان داد. فرگه کار او را به طور منظم و صوری‌تر دنبال کرد و درنهایت این آموزه در پروژهٔ راسل و وایتهد به انجام خود رسید. رشتهٔ اصلی در تمامی این تلاش‌ها این است که ریاضیات شاخه‌ای از منطق است. به جای این‌که منطق ابزاری برای ریاضیات باشد، منطق پیش‌رو ریاضیات می‌شود. همهٔ مفاهیم ریاضی باید در قالب مفاهیم منطقی تدوین شوند و همهٔ قضایای ریاضیات باید به عنوان قضایای منطق بسط یابند. تمایز بین منطق و ریاضیات صرفاً عملی برای تسهیل کار درمی‌آید.

کتاب *اصول ریاضیات* راسل با مفاهیم اولیه و گزاره‌های اولیه آغاز می‌شود. این گزاره‌های اولیه متناظر با اصطلاحات تعریف‌نشده و اصول موضوعه یک مبحث مجرد صوری آغاز می‌شود. این مفاهیم و گزاره‌های اولیه نباید در معرض تعبیر و تفسیر قرار گیرند، بلکه باید به مفاهیم شهودی منطق محدود شوند. آن‌ها را باید توصیف‌هایی موجه و فرض‌هایی دربارهٔ دنیای واقعی تلقی کرد یا حداقل آن‌ها را چنین پذیرفت. هدف *اصول ریاضیات* بسط مفاهیم و قضایای ریاضی از این مفاهیم و گزاره‌های اولیه است که با حساب گزاره‌ها آغاز می‌شود و از طریق نظریهٔ انواع و رابطه‌ها به طرف تأسیس دستگاه اعداد طبیعی و از آن‌جا به سمت همهٔ ریاضیاتی که از دستگاه اعداد طبیعی قابل استخراج است پیش می‌رود.

برای اجتناب از پارادوکس‌های نظریهٔ مجموعه‌ها نظریهٔ انواع به کار گرفته می‌شود. در به‌کارگیری نظریهٔ نوع‌ها از این قاعده تبعیت می‌شود که کلیهٔ عناصر هر طبقه باید از یک نوع باشند. پیروی از این قاعده تعاریف غیر اسنادی را مستثنی می‌کند و بدین‌ترتیب از پارادکس‌های نظریهٔ مجموعه‌ها اجتناب می‌شود. به گونه‌ای که در *اصول ریاضیات* عمل شده است، سلسله مراتبی در داخل سلسله مراتب درنظر گرفته شده است که به اصطلاح نظریهٔ انشقاقی انواع نامیده می‌شود. برای به دست آوردن تعریف‌های غیر اسنادی مورد نیاز در تأسیس آنالیز «اصل تحویل پذیری» باید وارد بحث شود. انتقادات فراوانی به این اصل شده است که همان‌طور که دیدیم رمزی سعی کرد با واکاوی مفهوم پارادوکس، لازم‌نبودن آن را نشان دهد.

پروژهٔ منطق‌گرایی راسل تلاشی بود برای تأسیس ریاضیات بر پایهٔ منطق و به عبارت دیگر فروکاهی ریاضیات به منطق. اگر با آرای ویتگنشتاین در *رسالهٔ منطقی- فلسفی* وی هم‌رأی باشیم، قضایای منطق همان‌گویی‌هایی توخالی‌اند و محتوای عینی ندارند. در این صورت تمام برنامهٔ فروکاهی ریاضیات به منطق کاری بیهوده است، زیرا آن‌چه قرار است مبنای ریاضیات باشد خود توخالی و بی‌محتواست. از طرف دیگر اصول موضوعه‌سازی منطق و استنتاج بعضی از قضایای منطق از بعضی دیگر به عنوان اصل موضوع بی‌مورد است، زیرا تمام قضایای منطق در یک مرتبه‌اند و یک حرف می‌زنند؛ یعنی هیچ‌چیز نمی‌گویند. ویتگنشتاین در *رساله* می‌گوید که گزاره‌های منطق سلسله مراتب ندارند؛ «علامت ویژهٔ گزارهٔ منطقی این است که می‌توانیم صدق آن را از روی نمادهایش تشخیص دهیم. این واقعیت به خودی خود تمام فلسفهٔ منطق را دربر می‌گیرد» (Wittgenstein, 1922: 6.1).

ویتگنشتاین از دو وجه به نقد فلسفهٔ راسل می‌پردازد:

اولا، به نظر راسل حقایق منطق مبتنی‌بر مجموعه‌ای از اصول بدیهی اولیه‌اند، اما ویتگنشتاین معتقد است که ما در منطق قضایای اولیه و قضایای فرعی ثانویه که از آن‌ها استنتاج شده باشند نداریم، زیرا تمام قضایای منطق دارای یک پایگاه معرفت‌شناختی هستند؛ یعنی همهٔ آن‌ها معلوم متکررند و هیچ حرفی از عالم نمی‌زنند.

ثانیاً، برخلاف تصور راسل ما در منطق هیچ مفهوم اولیه‌ای نداریم، زیرا ادات‌های منطقی، مصداق یا مابه ازای عینی ندارند یعنی بازتاب هستی عینی نیستند، بلکه صرفاً نمادهایی برای عملیات منطقی‌اند.

پس ما در منطق نه مفاهیم اولیه داریم و نه قضایای اولیه. ویتگنشتاین معتقد است که گزاره های منطق همان‌گویی‌اند. قلمرو این آموزه هم اصول و هم قضایای دستگاه منطق را دربر می‌گیرد. بدین طریق تلاش راسل برای اصل موضوعی کردن منطق که در آن حقایق منطق از تعداد کمی اصول موضوعه استنتاج شوند بی‌مورد است.

پی‌نوشت

۱. برای توضیحات مبسوط‌تر ← Ferege, 1960: 73-80.

۲. ریاضی‌دان آلمانی که کارهایش در جبر مجرد و نظریهٔ اعداد معروف است.

۳. برای دیدن اثبات ریاضی این قضیه ←
Rudin, Walter (1976). *Principles of Mathematical Analysis*, New York: Mac Graw-Hill, pp. 17-21.

منابع

کاپلستون، فردریک (۱۳۸۷). *تاریخ فلسفه، از ولف تا کانت*، ج ٦، ترجمهٔ اسماعیل سعادت، منوچهر بزرگمهر، تهران: سروش.

Ewald, William (1999). *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*, New York: Oxford University Press Inc.

Sandra, Lapointe (2011). *Bolzano's Theoretical Philosophy*, Basingstoke: Palgrave Macmillan.

Carnap, Rudolf (1983). 'The Logicist Foundations of Mathematics', In *Philosophy of Mathematics*, Paul Benaceraraf and Hilary Putnam (eds.), Cambridge: Cambridge University Press.

Shapiro, Stewart (2000). *Thinking about Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

Dummett, Michael (1991). *Ferege and Other Philosophers*, Oxford: Clarendon.

Kitcher, Phillip (1979). 'Frege's Epistemology', *The Philosophical Review*, Vol. 88.

Ferege, Gottlob (1960). *The Foundations of Arithmetic*, Trans. J. L. Austin, New York: Harper Torchbook.

Russell, Bertrand (1910). *Principia Mathematica*, Vol. 1, Cambridge: Cambridge University Press.

Griffin, Nicolas (2003). 'Mathematics in and Behind Russell's Logicism, and Its Reception', In *Cambridge Companion to Bertrand Russell*, Nicolas Griffin (ed.), Cambridge: Cambridge University Press.

Wittgenstein, Ludwig (1922). *Tractatus*, Trans. D. F. Pears and B. F. McGuinness, London: Routledge.

Ramsey, Frank P. (1926). *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge and Kegan Paul.