فلسفهٔ علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
سال دوم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۱، صص ۱ – ۲٤

خوارزمی نظریه‌پرداز معادلات درجه دوم

جعفر آقایانی چاوشی*

چکیده

محمد بن موسی خوارزمی ریاضی‌دان بلندآوازهٔ ایرانی در قرن سوم هجری علمی را برای نخستین‌بار صورت‌بندی و تدوین کرد که خود آن را «جبر و مقابله» نامید؛ علمی که تمام شرایط یک دانش واقعی را داشت، یعنی همان‌که اروپاییان از آن به «ساینس» تعبیر می‌کنند.

این ریاضی‌دان با استفاده از این دانش نوپا توانست همهٔ معادلات درجه‌دوم زمانش را حل و راه را برای حل معادلات درجهٔ بالاتر هموار کند.

بر اساس الواح بابلی و آثار برجای‌مانده از محاسبه‌گران هندی در عهد باستان، مردمان بابل و هند به حل حالات خاصی از معادلات درجه‌دوم موفق شده بودند، اما آن‌ها راه حل‌های خود را فقط به صورت دستور ارائه کردند؛ یعنی این راه حل‌ها، که برای رفع نیازهای زندگی روزمرهٔ آنان ارائه شده بودند و نه به منظور گسترش دانش ریاضی، فاقد براهین علمی بودند. ابتکار خوارزمی در آن است که وی نخست همهٔ معادلات درجه‌دوم شناخته‌شدهٔ زمانش را بررسی می‌کند؛ در مرحلهٔ دوم روش حل هریک از آن‌ها را ارائه می‌دهد؛ سرانجام در مرحلهٔ سوم، این روش‌ها را با کمک علم هندسه اثبات می‌کند؛ مؤلفه‌هایی که درمجموع علم جدیدی به نام «جبر» را تشکیل می‌دهند. این علم، که از طریق ترجمه‌های لاتینی کتاب خوارزمی در قرون وسطی به اروپا راه یافت، هم در قرون وسطی و هم در عصر رنسانس تحول بزرگی در علم ریاضیات را موجب شد، چنان‌که در قرن شانزدهم میلادی تارتاگلیا و کاردان، ریاضی‌دانان ایتالیایی که با ترجمهٔ لاتینی *جبر و مقابله*، آشنا بودند روش این ریاضی‌دان ایرانی را برای حل معادلهٔ درجه‌سوم تعمیم دادند و بدین‌ترتیب گام دیگری در گسترش ریاضیات برداشتند.

---

* استادیار گروه فلسفهٔ علم، دانشگاه صنعتی شریف jchavoshi@hotmail.com
تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۱۲/۱٦، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۲/۱۱

در این مقاله کوشیده‌ایم چگونگی تکوین علم جبر را نشان دهیم و تـأثیر آن را در اروپا بررسی کنیم.

کلیدواژه‌ها: خوارزمی، جبر و مقابله، نظریهٔ علمی، معادلات درجه دوم.

۱. مقدمه

چنان‌که اشاره کردیم خوارزمی با کتاب *جبر و مقابلهٔ* خود علمی را پایه‌ریزی کرد که پیش از وی سابقه نداشت. ارزش این ابتکار، یا به تعبیر بهتر اختراع، چه از نظر علمی و چه از نظر فرهنگی و نژادی بیش از آن است که به‌تصور آید؛ زیرا این علم استدلالی و دقیق اصل موضوعهٔ «علم اروپایی» را، که عده‌ای از متفکران غربی بنا نهاده بودند و از آن برای برتری نژاد اروپایی بر نژادهای دیگر سود می‌جستند، به چالش می‌کشید.

لازم به یادآوری است که فلاسفهٔ نژادپرست غربی از دیرباز علم شرقی، به‌ویژه علم اسلامی، و به تعبیر خود آن‌ها «علم عرب» را مقابل «علم اروپایی» قرار داده و بر این باور بودند که علم اسلامی محصول تجارب روزمره است و با شهود و حدس دست به گریبان. بنابراین، توانایی برابری با «علم اروپایی» را ندارد که مبتنی‌بر فرضیه‌های علمی، مفاهیم روشن و منسجم، روش‌شناسی اثباتی، و خلاصه تجربیات دقیق آزمایشگاهی است.[1] از سوی دیگر، علم اروپایی، که برخاسته از تمدن یونان باستان است، قرن‌ها بعد در همین اروپا نشو و نمو کرده است و توسط دانشمندان اروپایی به دیگر نقاط جهان راه یافته است.

برای مثال ارنست رنان، فیلسوف فرانسوی قرن نوزدهم میلادی، دربارهٔ علم و فلسفه در شرق چنین نوشته است:

در علم و فلسفه ما کاملاً یونانی هستیم. جست‌وجوی علت‌ها و دانستن برای دانستن چیزی است که جز در یونان در هیچ‌جای دیگر وجود ندارد، همان چیزی که ما فقط و فقط از این سرزمین فراگرفته‌ایم، [تمدن] بابل گرچه صاحب نوعی دانش بود، اما از اصول علمی عالی و قوانین ثابت طبیعی بی‌بهره بود. [تمدن] مصر هم با هندسه آشنا بود، اما به خلق [کتابی همچون] *اصول* (= کتاب هندسهٔ اقلیدس) نائل نشد. دربارهٔ اندیشهٔ حاکم‌بر مردم سامی عهد عتیق (= یهودیان) نیز باید بگویم که ذاتاً ضد فلسفه و علم است. در کتاب *ایوب* جست‌وجوی علل [پدیده‌ها] در ردیف کفر قرار گرفته است و در حکمت *یسوعی* (l'Ecclésiaste) نیز علم بیهوده تلقی شده است. مؤلف این کتاب که پیش از بلوغ فکری سرخورده شده، مدعی است همهٔ آن‌چه که زیر خورشید قرار گرفته

را مطالعه کرده و چیزی جز اندوه و نگرانی نیافته است ... اغلب اوقات از علـم و فلسـفهٔ عرب (= اسلامی) بحث می‌کنیم. این علم و فلسفه چیزی جز ترجمهٔ نـاچیزی از علـم و فلسفهٔ یونان نیست.[۲]

این‌گونه نگاه نژادپرستانه به علم شرقی نه‌تنها در آثار فلاسفه‌ای چـون دکـارت، کانـت، اگوست کنت، هگل، مارکس، و هوسرل بلکه نزد مورخان علوم، چون پل تانری، الکساندر کویره، و مؤلفان آثار ریاضی بورباکی به‌خوبی مشهود است.

این فلاسفه و علمای اروپایی، که خواه‌ناخواه اصل موضوعهٔ «علم اروپایی» را بنا نهادنـد و در ترویج آن کوشیدند، تکلیف علوم واردشده از تمدن‌های دیگر، به‌ویژه از تمدن اسـلامی، را در این علم مشخص نکردند. آنان فقط به تعریفی از علم و نظریهٔ علمـی پرداختنـد کـه در آن اجماع داشتند. با این حال، نظریهٔ خوارزمی در پیدایش علم جبر، که همهٔ ویژگی‌های علم بـه مفهوم امروزی را داشت و سرچشمهٔ انقلاب عظیمی در ریاضیات شد، درنهایـت از ذهـن نـه یک اروپایی، بلکه یـک شـرقی مسـلمان تـراوش کـرده بـود و ایـن امـر همـهٔ محاسـبات و پیش‌داوری‌های نژادپرستانه را خدشه‌دار می‌کرد. از سوی دیگر، تأثیر جبـر در اروپـا و جهـان علمی آن‌قدر چشم‌گیر و گسترده بود که انکار آن امکان نداشت. از این‌رو، بعضی از مورخـان برجستهٔ علم اروپا به‌عمد از بحث دربارهٔ تاریخ جبر چشم می‌پوشیدند و برخـی دیگـر ماننـد لئون روده (L. Rodet) نیز تلاش می‌کردند کار خوارزمی را مشابه کار علمای هند قلمداد کنند تا از ارزش آن بکاهند (Rodet, 1878) و از این‌روست که در بعضی از کتاب‌های تاریخ علـم، که در اروپا نوشته شده است، نوعی تنگ‌نظری در قبال کار خوارزمی دیده می‌شود.

فقط در نیم قرن اخیر بود که بعضی از پژوهش‌گران بی‌طرف تاریخ علم توانستند حـق مطلب را ادا کنند و، با توجه به ابداع علم جبر و گسترش آن توسط مسلمانان، ثابت کننـد که علم نژاد و فرهنگ نمی‌شناسد و محصول ذهن خلاق انسان‌های متفکری است کـه در این عرصه تلاش می‌کنند.

در این مقاله، پس از بحث مختصری دربارهٔ ماهیت علم و نظریهٔ علمی نشان خـواهیم داد که نظریهٔ خوارزمی دربارهٔ معادلات درجه‌دوم یک «نظریهٔ علمی» است و نقـش آن را در پیدایش نظریهٔ معادلات درجه‌سوم نیز یادآوری خواهیم کرد.

۲. تعریف علم

دربارهٔ چیستی علم صاحب‌نظران نظریات متفاوتی ارائـه کـرده‌انـد کـه کمـابیش شـبیه بـه

یک‌دیگرند.[۳] ما تعریف آلبرت اینشتین را بازگو می‌کنیم که نابغهٔ علمی قرن بیستم معرفی شده است. اینشتین علم را چنین تعریف کرده است:

> علم کوشش دیرینه‌ای است تا پدیدارهای محسوس این دنیا را، به وسیلهٔ اندیشهٔ منظم، حدالمقدور به صورت جامعیتی دقیق و کامل درآوریم. به عبارت دیگر، علم تلاشی است برای بازسازی عالم هستی از طریق فرایند مفهوم‌پردازی (اینشتین، ۱۳۷۰: ۲۱).

از این گفته می‌توان علم را دانشی انعکاسی(réflexif) دانست. بدین معنی که چنین دانشی توانایی تبیین روش خود را نیز دارد. این روش می‌تواند مبتنی‌بر «استدلال قیاسی» و یا «مشاهدات تجربی» باشد.

پژوهش‌های تاریخی نشان می‌دهند که خاستگاه این علم یونان باستان بوده است (آقایانی چاوشی، ۱۳۸۰)؛ زیرا بررسی آماری (عددی) در مصر و بابل و تأیید الگوریتم‌ها در چین نمونه‌هایی از دانش‌های انعطاف‌پذیر[۴] در عهد باستان است. حال آن‌که در همین زمان در یونان، دانشمندان برای شناخت اشیای هندسی و روابط حاکم‌بر آن‌ها روشی را ابداع کردند که امروزه از آن به «روش آکسیوماتیک» تعبیر می‌شود. همان روشی که اقلیدس هندسهٔ خود را بر اساس آن بنا نهاده است. لازم به یادآوری است منظور از آکسیوماتیک روش دقیق علمی است که موضوع ناشناخته‌ای را با استفاده از قضایای شناخته‌شده و از طریق استقرای قیاسی حاصل کند (Blanché, 1965: 1).

بر این مبنا، هندسهٔ اقلیدسی علمی است که گزاره‌های ویژهٔ خود را دارد. این گزاره‌ها عبارت‌اند از ۱. تعاریف، ۲. اصول متعارف یا آکسیوم‌ها، ۳. اصول موضوعه یا پوستولاها.

مراد از تعریف گزاره‌ای است که مشخص می‌کند یک شیء چیست.

اصول متعارف یا آکسیوم‌ها به حقایق کلی اطلاق می‌شود؛ از قبیل «کل بزرگ‌تر از جزء است». چنین اصول متعارفی اثبات‌ناپذیرند.

اصول موضوعه یا پوستولاها حقایق مربوط به علم مخصوصی‌اند که حقیقت آن‌ها چندان بدیهی نیست، لیکن باید آن‌ها را بدون اثبات پذیرفت. برای مثال، اقلیدس در بین اصول موضوعهٔ خود این گزاره را گنجانده است: «از هر دو نقطه می‌توان یک خط راست کشید».

با استفاده از این گزاره‌ها بود که اقلیدس قضایای بسیاری را در هندسه کشف کرد و راه را برای کشف قضایای دیگر با روش قیاسی هموار کرد. حال که با تعریف علم و به‌ویژه علم هندسه آشنا شدیم به سراغ تعریف یک نظریهٔ علمی می‌رویم.

۳. تعریف نظریهٔ علمی

نظریهٔ علمی به مجموعهٔ مفاهیم و گزاره‌هایی گفته می‌شود که ما را به بازآفرینی یا شناخت پدیده‌ای رهنمون کنند.

برخی از نظریه‌های وابسته به هم موجب پیدایش یک نظام یا علم می‌شوند.

برای رسیدن به یک نظریهٔ علمی در علوم طبیعی عموماً از «روش تجربی»، که به آن «استقرا» نیز می‌گویند، استفاده می‌شود. فرضیه‌ها توضیحاتی‌اند که پژوهش‌گران پس از مشاهدات دقیق خود در بخش خاصی از علوم و برای تفهیم آن‌ها ارائه می‌دهند.

فرضیه‌ها درحقیقت حکم پیشنهادهایی را دارند که پژوهش‌گران برای توجیه یک پدیده ارائه می‌دهند.

پس از ارائهٔ فرضیه‌ها، برای رد یا قبول آن‌ها آزمایش‌هایی انجام می‌شود و بر اساس فرضیه‌های باقی‌مانده پیش‌بینی‌هایی می‌شود و این عمل به همین نحو دنبال می‌شود تا محتمل‌ترین فرضیه انتخاب شود. این فرضیه، که از آزمون‌های تجربی گذشته است، سرانجام نام یک «نظریهٔ علمی» را به خود می‌گیرد.

نظریهٔ علمی باید واجد شرایط زیر باشد:

۱.۳ جامعیت

نظریات علمی گرچه موضوع مشخصی دارند، حوزهٔ مصداقی آن‌ها آن‌قدر گسترده است که ضرورتاً یک مورد خاص را شامل نمی‌شوند (جعفرنژاد، ۱۳۸۵: ۵۷).

۲.۳ انسجام منطقی

بین اجزای یک نظریهٔ علمی باید انسجام منطقی برقرار باشد. به عبارت دیگر، در آن اصلی نباید اصل دیگر را نقض کند و نتایج تجربی یا مشاهداتی نباید با فرضیه‌های اولیهٔ آن مغایرت داشته باشند.

۳.۳ شفافیت زبانی

فقط فرضیه‌هایی را می‌توان «نظریهٔ علمی» نامید که علاوه بر شرایط مذکور در قالب زبانی منسجم و شفاف ارائه شوند (همان).

٤.٣ کسب اعتبار علمی

این شرط از اساسی‌ترین شروط یک «نظریهٔ علمی» است؛ یک نظریه هنگامی علمی تلقی می‌شود که به وسیلهٔ یکی از علوم دقیقهٔ شناخته‌شده مدلل شود. به تعبیر دیگر، اندیشهٔ فردی هنگامی می‌تواند صورت نظریه به خود بگیرد که به فضای ذهن جمعی وارد شود. فضایی که در آن دانشمندان اندیشه را محک خواهند زد.

٥.٣ تعمیم‌پذیری

نظریهٔ علمی در یک علم خاص باید تکیه‌گاهی برای ساختارهای متفاوت آن علم باشد و سؤالات جدیدی ایجاد کند یا در اثبات نظریه‌های کلی‌تر از خود به‌کار رود و در راستای پیش‌بینی موارد جدیدی کارساز باشد.

۴. خوارزمی و علم جبر

محمدبن موسی خوارزمی (درگذشته بعد از ۲۳۲ق) را پژوهش‌گران تاریخ علم به‌حق بنیادگذار علم جبر نامیده‌اند. این علم که از طریق کتاب وی، *المختصر فی حساب الجبر و المقابله*، در جهان اسلام شهرت یافت، ریاضی‌دانانِ پس از خود را به‌شدت تحت تأثیر قرار داد. این کتاب همچنین در قرون وسطای مسیحی از طریق ترجمه‌های لاتینی آن به اروپا راه یافت و جهان غرب را برای همیشه وام‌دار خود کرد.

دو واژهٔ «جبر» و «الگوریتم»، که امروزه در ریاضیات همهٔ ملل جهان راه یافته است، درواقع برگرفته از ترجمهٔ لاتینی کتاب خوارزمی است. اولی از نام کتابش یعنی «الجبر» گرفته شده و لفظ دوم یعنی «الگوریتم» نیز برگرفته از شکل لاتینی «الخوارزمی» یعنی الگوریتمی است.[۳] در این نوشته، پس از ارائهٔ شرح حال مختصری از خوارزمی، به بررسی ابتکار وی در پدیدآوردن علم جبر می‌پردازیم.

١.٤ شرح حال خوارزمی

سال تولد خوارزمی نامعلوم است، ولی مورخانِ علم احتمال داده‌اند که در نیمهٔ دوم قرن دوم هجری در خوارزم، که از شهرهای خراسانِ بزرگ آن زمان بود، به دنیا آمده است.

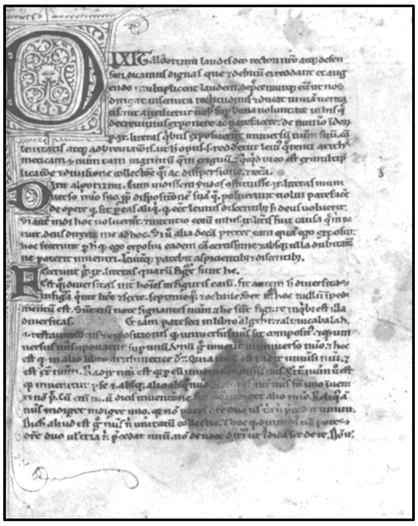
بغداد در آن زمان از مراکز علمی و فرهنگی جهان اسلام بود و دانشمندان را از هر نـژاد و ملیتی به سوی خود جلب می‌کرد. همین امر قطعاً خوارزمی را به سفر به بغداد تشویق کرد.

در بغداد به بیت‌الحکمه، که به دستور مأمون عباسی برای ترجمه و شرح آثار علمـی و فلسفی تمدن‌های یونانی، هندی، بابلی، و ایرانی ساخته شده بود، دعوت شد و همراه تنی چند از ریاضی‌دانان برجستهٔ آن زمان، همچون بنوموسی، به فعالیت علمی مشغول شد. در همین سال‌های فعالیت در بیت‌الحکمه بود که آثار ماندگار خود را چه در ریاضیات و چـه در نجوم به رشتهٔ تحریر درآورد. خوارزمی در ۲۳۲ ق در بغداد درگذشت (قربانی، ۱۳۷۵: ۲۳۹).

۲.٤ آثار علمی خوارزمی

مهم‌ترین اثر خوارزمی در ریاضیات *المختصر من حساب الجبر و المقابله* است. رُزن در سال ۱۸۳۱ م این کتاب را از روی متن عربی نسخهٔ خطی محفوظ در کتاب‌خانـهٔ آکسـفورد بـه انگلیسی ترجمه کرد و همراه با متن عربی آن به چاپ رساند (Khwarizmi, 1831).

متن عربی این کتاب را، بار دیگر در ۱۹۳۹، علی مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمـد در مصر چاپ کردند (خوارزمی، ۱۹۳۹). رشدی راشد متن عربی *جبر و مقابله* را همراه بـا ترجمهٔ فرانسوی آن در ۲۰۰۷ در پاریس به چاپ رساند (Rashed, 2007).



تصویر صفحه‌ای از ترجمهٔ لاتینی کتاب *حساب* خوارزمی که در آن جملهٔ **dixit algoritmi**، به معنای قال الخوارزمی، آمده است.

همین کتاب را، با چاپ راشد، نیکولا فارس به عربی ترجمه کرد و این ترجمه در ۲۰۱۰ در بیروت به چاپ رسید (راشد، ۲۰۱۰). حسین خدیوجم کتاب خوارزمی را از روی چاپ مصطفی مشرفه به فارسی ترجمه کرد و در تهران به چاپ رساند (خوارزمی، ۱۳۶۲).

از جبر *و مقابله* دو ترجمهٔ لاتینی قدیمی در دست است که مترجم یکی از آن‌ها جرارد کرمونی است که در اوایل قرن دوازدهم میلادی زندگی می‌کرده است. مترجم لاتینی دیگر کتاب خوارزمی رابرت چستری است که در ۱۱٤۵ آن را ترجمه کرده است.

هوقس در ۱۹۸٦ متن منقح ترجمهٔ کرمونی را چاپ کرده است (Hughes, 1986). کارپینسکی نیز ترجمهٔ لاتینی چستری را با ترجمهٔ انگلیسی آن همراه با یادداشت‌های مفیدی در ۱۹۱۵ به چاپ رساند (Khwarizmi, 1915).

۱.۲.٤ کتاب *الجمع و التفریق*

این کتاب، که تحت تأثیر ریاضیات هندی نوشته شده، نخستین‌بار حساب هندی را در کشورهای اسلامی نشر و گسترش داده است. متن عربی این کتاب در دست نیست، ولی از آن ترجمهٔ لاتینی قدیمی در کتاب‌خانهٔ کیمبریج نگه‌داری می‌شود. این ترجمهٔ لاتینی را بن کمپانی به چاپ رسانده است (قربانی، ۱۳۷۵).

۲.۲.٤ *زیج*

این اثر نجومی خوارزمی نیز تحت تأثیر نجوم هندی نوشته شده و ریاضی‌دانان اسلامی بعد از خویش را به سهم خود با این نجوم آشنا کرده است. از این اثر ترجمه‌ای به انگلیسی در دست است (Neugebauer, 1962).

۵. خوارزمی نظریه‌پرداز معادلات درجه دوم

خوارزمی از این جهت در تاریخ علم اهمیت دارد که مبتکر دانشی است که خود آن را علم «جبر و مقابله» نامیده است. جبر در نگاه خوارزمی همان نظریهٔ علمی معادلات درجه اول و مخصوصاً درجه دوم است؛ یعنی خوارزمی نخستین کسی است که نظریه‌ای علمی را برای حل معادلات درجه دوم ارائه کرده است.

البته مراد از نظریهٔ علمی حل یک معادلهٔ درجه دوم برای اولین‌بار نیست؛ چرا که بابلیان و هندیان، قرن‌ها پیش از خوارزمی، دستوراتی برای حل بعضی از معادلات درجه دوم ارائه

کرده بودند (Rodet, 1878). روشن است که چنین دستوراتی را که این محاسبه‌گران عهد باستان برای حل مسائل روزمرهٔ خود، از قبیل تقسیم زمین، به‌کار می‌بردند، نمی‌توان یک نظریهٔ علمی نامید. آنان نیز نمی‌خواستند یک نظریهٔ علمی ارائه دهند، بلکه هدف اصلی آن‌ها صرفاً رفع بعضی از نیازها و مشکلات زندگی بود که به معادلات درجه‌دوم در حالات خاصی منجر می‌شد.

احتمال می‌رود که خوارزمی با این دستورات آشنا بوده است. بعضی از مورخان تاریخ علم، مانند انبوبا، کوشیده‌اند تا برای کار خوارزمی منابعی بابلی بیابند (Anbouba, 1978: 75). اگر هم ثابت شود که خوارزمی از این منابع بهره برده است، چیزی از ارزش کارش نمی‌کاهد؛ زیرا خوارزمی اگر از منابع هندی و بابلی بهره برده است، به منابع یونانی نیز متکی بوده است. درمجموع، کار خوارزمی تلفیق موفقی از کارهای بابلیان، هندیان، و یونانیان بوده است؛ زیرا او با این کار خود به ارائهٔ نظریه‌ای پرداخت که در منابع هیچ‌یک از این تمدن‌ها وجود نداشت. بنا به گفتهٔ اونگورو از مورخان علوم ریاضی «محاسبات بابلی و یونانی غیرجبری هستند. همین قادرنبودن به تشریح روابط و حل مراحل است که مانع این می‌شود که ریاضی‌دان بابلی واجد شرایط جبردانی باشد ... چیزی که او قادر است به‌وجود بیاورد دستور العمل است» (Unguru, 1979: 561 به نقل از الهه خیراندیش، ۱۳۶۸: ۲۲۰). حال که تفاوت کار خوارزمی با کار اسلاف وی را روشن کردیم به ارائهٔ نظریه‌اش در علم جبر می‌پردازیم. این نظریه را در سه ویژگی می‌توان خلاصه کرد که در ادامه هریک را توضیح خواهیم داد.

۱.۵ ارائهٔ صورت کلی تمام معادلات درجه‌دوم

پیش‌تر گفتیم که یک نظریه هنگامی «علمی» نامیده می‌شود که پدیده‌ای را در حالت کلی بررسی کند. به همین علت است که خوارزمی نخست صورت کلی تمام معادلات درجه‌دوم شناخته‌شده در عصر خود را بیان می‌کند که با علائم امروزی عبارتند از:

(1) $ax^2 = bx$

(2) $ax^2 = c$

(3) $ax^2 + bx = c$

(4) $ax^2 = bx + c$

(5) $ax^2 + c = bx$

که در آن a، b، و c همگی اعداد صحیح و مثبت‌اند. البته این معادلات را امروزه می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

که در آن ضرایب A، B، و C اعداد حقیقی‌اند.

۲.۵ ارائهٔ الگوریتم برای حل هریک از این معادلات

خوارزمی، پس از مطرح‌کردن صورت کلی معادلات درجه دوم شناخته‌شده در عصر خود، دستور حل هریک از آن‌ها را نیز ارائه می‌دهد. این دستورات را از این پس «الگوریتم» می‌نامیم.

۳.۵ اثبات هندسی هریک از این الگوریتم‌ها

خوارزمی پس از ارائهٔ الگوریتم، برای حل معادلات درجه دوم، به اثبات هندسی هریک از این الگوریتم‌ها می‌پردازد تا بتواند نظریهٔ علمی خود را با علم هندسه، یعنی علمی که دقیق و دارای شهود واقعی است، مبرهن سازد و به پشتوانهٔ این اثبات هندسی جبر را به یک علم جهانی و مستدل تبدیل کند. این همان نظریهٔ علمی خوارزمی دربارهٔ معادلات درجه دوم است که متأسفانه اغلب محققان تاریخ علم، چه ایرانی و چه غیر ایرانی، از شناخت آن عاجز بوده‌اند.

البته خوارزمی پس از مطرح‌کردن نظریهٔ علمی خود دربارهٔ معادلات درجه دوم این معادلات را در هریک از حالات خاص مطالعه می‌کند و ما برای درک بهتر نظریهٔ او ناگریزیم یکی از این حالات خاص را بررسی کنیم، اما این بررسی بدون آگاهی از معانی دو واژهٔ «جبر» و «مقابله» ممکن نیست.

جبر و مقابله برای خوارزمی گویای دو عملیات است؛ جبر یعنی شکسته‌بندی، در قدیم در ممالک اسلامی هرگاه دست یا پای کسی شکسته می‌شد برای معالجه پیش شکسته‌بندی که او را «المُجَبِر» می‌نامیدند می‌رفت. این شخص نیز عضو شکسته را معمولاً برای مدتی به چوبی می‌بست. هنوز هم در مصر شکسته‌بند را با نام «المُجَبِر» می‌شناسند. حضرت امیر(ع) در دعای «جوشن کبیر» خدا را «جابر العظم الکسیر» به معنای «پیونددهندهٔ استخوان‌های شکسته» نامیده است.

اما در زبان خوارزمی «جبر» به این مفهوم است که باید عضو شکستهٔ معادله را بـه هـم پیوند داد. این عضو شکسته همان است که دارای علامت منفی است و بنابراین باید کـاری کرد که این علامت را به مثبت تبدیل کرد؛ یعنی جملهٔ دارای علامت منفی را به طرف دیگر معادله انتقال داد.

اگر فرضاً معادله‌ای به صورت $x^2 - 10x + 50 = 29$ داشته باشیم، با انتقال $-10x$ به طرف راستِ معادله عمل «جبر» را انجام داده‌ایم و معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

$$x^2 + 50 = 10x + 29$$

اما «مقابله» یعنی از دو طرف معادله مقادیر یک‌سانی را کم کنـیم. در مثـال فـوق، از دو طرف، مقدار ۲۹ را کم می‌کنیم و با این کار، یعنی مقابله، معادله به شکل نهایی خود یعنی:

$$x^2 + 21 = 10x$$

درمی‌آید که خوارزمی نه به شکل یک فرمول ریاضی، بلکه آن را بـه صـورت کلمـات مطرح می‌کند و می‌گوید که مال یعنی x^2 به اضافهٔ 21 مساوی 10 جذر یعنی 10x است.

دستورالعمل یا الگوریتمی که خوارزمی برای حل این معادله ارائه می‌دهـد شـباهت بـه همان الگوریتم‌هایی دارد که امروزه در علوم مربوط به انفورماتیک از آن‌ها استفاده می‌شـود. دستورالعمل خوارزمی برای حل این معادله از قرار زیر است:

> جذر را نصف می‌کنی می‌شود پنج جذر. این پـنج جـذر را در خـودش ضـرب مـی‌کنـی می‌شود بیست و پنج جذر. پس عدد بیست و یک را که گفتیم همراه مال اسـت از آن کـم می‌کنی، چهار باقی می‌ماند. جذر چهار را می‌گیری که دو می‌شود. ایـن عـدد را از نصـف جذرها که عبارت است از پنج کم می‌کنی که عدد سه باقی می‌ماند و این عدد جذر مـالی است که می‌خواستی و خود مال نُه است و اگر بخواهی، می‌توانی این جذر را بر نصف آن جذرها بیفزایی. درنتیجه، هفت می‌شود و این عدد جذر مالی است که تو می‌خواهی و خود مال چهل و نه خواهد بود (خوارزمی، ١٣٦٢: ٤٥-٤٦).

این الگوریتم خوارزمی را می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد:

مرحلهٔ ۱ $10x \div 2 = 5x$

مرحلهٔ ۲ $5 \times 5 = 25$

مرحلهٔ ۳ $25 - 21 = 4$

مرحلهٔ ٤

$$\sqrt{4} = +2$$

خوارزمی همانند دیگر ریاضی‌دانان اسلامی عدد منفی را نمی‌شناخته است، بنابراین فقط 2+ را به عنوان ریشهٔ مثبت چهار درنظر می‌گیرد.

جواب معادلهٔ فوق عبارت است از $5 + 2 = 7$

البته خوارزمی همانند محاسبه‌گران بابلی نمی‌گوید که چگونه به این جواب رسیده است. امروزه می‌دانیم که این دستورالعمل حاصل عملیات زیر است:

$$x^2 + 21 = 10x$$
$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

اگر به طرفین این معادله ٤ را اضافه کنیم خواهیم داشت:

$$(x-5)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x - 5 = 2 \\ x = 7 \end{array}$$

دیدیم که خوارزمی معادلهٔ خود را فقط با ارائهٔ یک دستورالعمل یا الگوریتم حل کرد و درواقع تا این‌جا کار خوارزمی مشابه کار محاسبه‌گران بابلی است. فقط در اثبات هندسی این دستور است که خوارزمی از این محاسبه‌گران فراتر می‌رود؛ یعنی این دستور خود را با استدلالی هندسی ثابت می‌کند.

چرا اثبات هندسی؟ زیرا هندسه در یونان باستان به‌علت دقت و شهود آن مهم‌ترین قسمت ریاضیات محسوب می‌شد. مثلاً ابن یونس موصلی در قرن هفتم هجری، در شرحی که بر کتاب *اعمال الهندسهٔ* ابوالوفای بوزجانی نوشته است، هندسه را روح علوم دیگر نامیده است.[٦]

برهان هندسی خوارزمی چنین است:

مستطیل ABCD را به اضلاع AB=x و BC=10 را مطابق شکل رسم می‌کنیم. مساحت این مستطیل برابر است با 10x.

از طرفی این مقدار بنابه فرض معادله برابر است با $x^2 + 21$

روی ضلع BC نقطهٔ E را چنان درنظر می‌گیریم که BE=BF باشد. مربع ABEF را رسم می‌کنیم. واضح است که مساحت مستطیل CDEF برابر با ۲۱ واحد سطح است.

حال فرض می‌کنیم H وسط BC باشد. ضلع CD را تا نقطهٔ N امتداد می‌دهیم به طوری که CN=CH=5 باشد و سپس مربع CNMH را تکمیل می‌کنیم. مساحت این مستطیل مساوی با ۲۵ واحد سطح خواهد شد. از نقطهٔ I وسط AD نقطهٔ S را روی AD مشخص می‌کنیم به طوری که $IS = IF = 5 - x$ باشد.

مربع MISW را با مساحت $(5-x)^2$ تکمیل می‌کنیم.

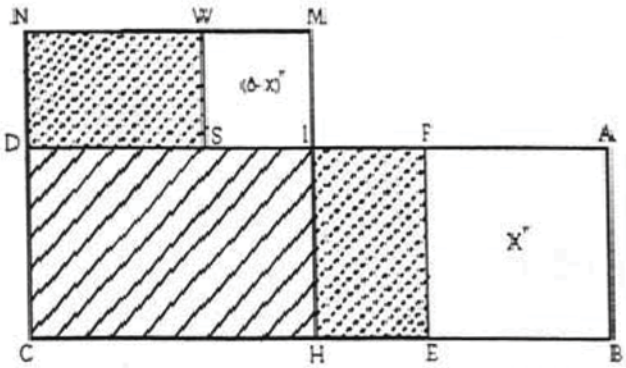
از آن‌جایی که DS برابر با مقدار مجهول یعنی x است، مساحت مستطیل DSWN برابر خواهد بود با $x(5-x) = S_{ITEH}$

بنابراین مساحت مربع CHMN برابر است با مساحت مستطیل CDEF به اضافهٔ مساحت مربع WSIM

یعنی:

$$21 + (5-x)^2 = 25 \Rightarrow (5-x)^2 = 4$$

$$x = 7$$



شکل ۱

۶. چگونگی تدوین نظریهٔ خوارزمی

خوارزمی از چگونگی پیدایش روش خود برای نیل به نظریه‌اش چیزی نمی‌گوید، اما امروزه با آگاهی از روشی که در بخش ٤ شرح دادیم می‌توانیم روش او را حدس بزنیم و آن را به صورت زیر شرح دهیم.

برای این منظور معادلهٔ $x^2 + 10x = 39$ را درنظر می‌گیریم که در *جبر و مقابلهٔ* وی درج شده است. می‌دانیم که هرگاه اندازهٔ عددی یک مربع را داشته باشیم، پیداکردن ضلع

این مربع کار مشکلی نیست؛ کافی است جذر آن را بگیریم. مثلاً معادلهٔ $x^2 = 81$ را می‌توانیم در ذهن حل کنیم و عدد 9 را برای جواب آن تعیین کنیم. بنابراین، هنگامی‌که در یک طرف معادله مربع کاملی داشته باشیم، با جذرگرفتن طرفین این معادله می‌توانیم به جواب برسیم.

اما وقتی‌که به معادلهٔ $x^2 + 10x = 39$ برخورد می‌کنیم، درحقیقت با معمایی مواجه می‌شویم که دانش قبلی ما نمی‌تواند ما را یاری دهد؛ چه عددی است که مجذور آن به اضافهٔ حاصل‌ضربش در ۱۰، برابر با ۳۹ است؟

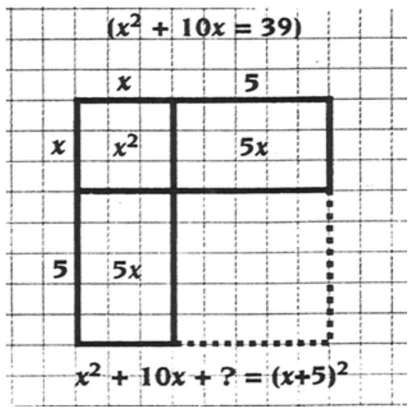
می‌خواهیم بدانیم خوارزمی در این باره چه می‌گوید.

اولاً، او فقط مربع واقعی یا مربع کامل را می‌شناسد. بنابراین، تلاش می‌کند که معادله را به صورتی درآورد که یک طرف آن مربع کامل باشد. برای این منظور، گام به گام از شهود هندسی بهره‌برداری می‌کند.

فرضیهٔ ۱. او احتمالاً مربعی رسم می‌کند که ضلعش برابر با x است. بدین‌ترتیب x^2 تجسم عینی به خود می‌گیرد. از آن‌جایی که یک سطح را فقط می‌توان با یک سطح جمع کرد، 10x نیز برای او سطح یک مستطیل را تجسم می‌کند، اما چسبانیدن این سطح به x^2 چیزی حاصل نمی‌دهد و این به مثابهٔ آن است که از x در $x^2 + 10x$ فاکتور بگیریم که معادله به این شکل درمی‌آید: $x(x+10) = 39$

بنابراین باید راه دیگری در پیش گرفت.

فرضیهٔ ۲. خوارزمی برای رهایی از این بن‌بست در دومین گام باید مستطیلِ به مساحت 10x را به دو مستطیل به مساحت 5x برش دهد و آن‌ها را مطابق شکل زیر کنار مربعِ x^2 گذارد.



شکل ۲

همان‌طور که دیده می‌شود، ما با یک مربع ناقص مواجهیم که اندازهٔ مساحت آن یعنی $(x+5)^2$ را می‌دانیم. بنابراین با کامل‌کردن این مربع، یعنی افزودن ۲۵ واحد سطح به معادلهٔ مورد نظر خود، به شکل زیر می‌رسیم:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \Rightarrow (x+5)^2 = 64$$

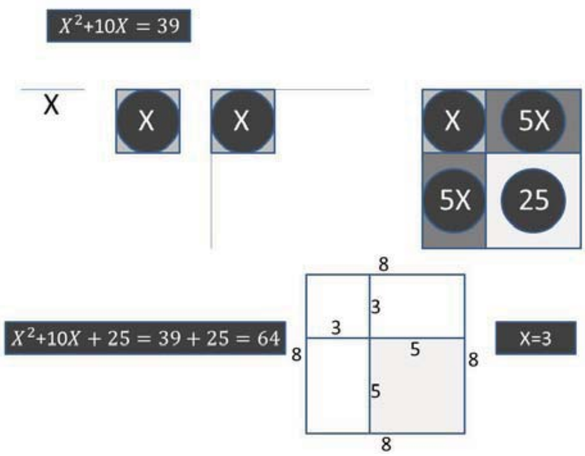
در این‌جا است که خوارزمی به مقصود اصلی خود نایل می‌شود.

اکنون در گام آخر باید از طرفین این معادله جذر گرفت و خواهیم داشت:

$$x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3$$

حال که خوارزمی جواب معادلهٔ مفروض را با استفاده از شهود هندسی به‌دست آورده است می‌تواند دستور یا الگوریتم لازم برای رسیدن به این جواب را به شرح زیر بیان کند:

> یک مال و ۱۰ جذر با ۳۹ برابر است. راه حل آن چنین است: ابتدا مقدار جذرها را که ۱۰ است نصف می‌کنی، ۵ می‌شود، آن نصف را در خودش ضرب می‌کنی، حاصل ۲۵ خواهد بود، سپس عدد ۳۹ را بر آن می‌افزایی، مجموعاً ٦٤ می‌شود، جذر این عدد را می‌گیری، ۸ می‌شود، سپس نصف جذرها، یعنی ۵ را از آن کم می‌کنی، حاصل یعنی سه مقدار «جذر مال» مورد نظر است و آن مال ۹ است (همان: ٤٣).



شکل ۳

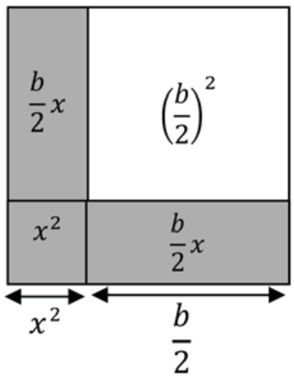
۱.٦ تعمیم مسئله برای ضرایب دل‌خواه

خوارزمی، برای این‌که از این روش یک دستور کلی استخراج کند، شکل کلی معادلـه را بـا ضرایب دل‌خواه درنظر می‌گیرد که ما با استفاده از علائم جدیـد بـه صـورت زیـر نمـایش می‌دهیم:

$$x^2 + bx = c$$

وی این معادله را به روش قبلی حل می‌کند:

مربعی به ضلع x را تجسم عینی می‌دهد. مستطیلی به طول و عرض b و x را می‌سازد و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، به طوری که طول آن‌ها $\frac{b}{2}$ و عرضشـان x باشـد. آن‌ها را مطابق شکل زیر کنار مربع قرار می‌دهد. شکل حاصل یک مربع نـاقص اسـت کـه برای کامل‌کردن آن باید مربعی به ضلع $\frac{b}{2}$ در جای خالی قرار داده شود.



شکل ٤

پس از افزودن این مقدار به طرفین معادله و جذرگیری از طرفین خواهیم داشت:

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

۷. تعمیم‌پذیری نظریهٔ خوارزمی

گفتیم که یکی از ویژگی‌های نظریهٔ علمی تعمیم‌پذیری آن است. این ویژگـی را در نظریـهٔ خوارزمی نیز مشاهده می‌کنیم. پیش از بررسی این مطلب باید اشاره کنیم که *جبر و مقابلـه*،

پس از ترجمه‌های لاتین آن، مورد توجه ریاضی‌دانان اروپایی قرار گرفت که معروف‌ترین آن‌ها لئوناردو پیزایی، معروف به فیبوناچی، بود (Samplonius, 1987: 83).

در قرن شانزدهم میلادی، دو ریاضی‌دان برجستهٔ ایتالیایی به نام‌های تارتاگلیا (Tartaglia) و کاردان (Cardan) مستقیم یا با واسطه و از طریق کتاب فیبوناچی با اثر خوارزمی آشنا شدند و توانستند راه حل جبری معادلهٔ درجه‌سوم را به کمک رادیکال‌ها ارائه کنند. در این کار نقش تارتاگلیا بسیار ارزنده است.

این ریاضی‌دان برای حل معادلهٔ درجه‌سوم به صورت زیر

$$x^3 + px = q \qquad (۱)$$

از همان روش هندسی خوارزمی برای حل معادلهٔ درجه‌دوم، که ما در بخش پیشین از آن بحث کردیم، بهره برد.

در زیر به ارائهٔ روش تارتاگالیا می‌پردازیم:[٤]

معادلهٔ (۱) برای این ریاضی‌دان ایتالیایی و معاصرانش نخستین‌بار به صورت یک معما مطرح شد؛ چه عددی است که مکعب آن با حاصل ضربش در یک عدد برابر با عددی مفروض است.

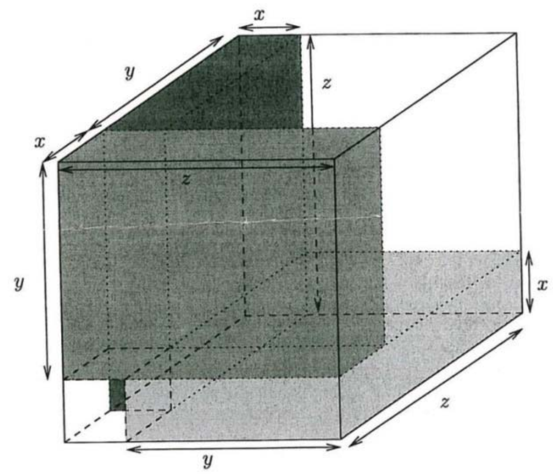
تارتاگالیا تا آن زمان فقط مکعب واقعی یا مکعب کامل را می‌شناخت و بنابراین باید تلاش کند که این معادله یا معما را به صورتی درآورد که یک طرف آن مکعب کامل باشد و از کعب‌گرفتن از آن به جواب مسئله برسد.

قبلاً اشاره کردیم که *جبر و مقابله*، که به لاتینی ترجمه شده بود، برای همهٔ ریاضی‌دانان اروپایی و به‌ویژه تارتاگالیا شناخته‌شده و منبع الهام بود. از این‌رو، تارتاگالیا همان روش هندسی یا شهودی را، که خوارزمی برای حل معادلات درجه‌دوم به صورت $x^2 + bx = c$ دنبال کرده بود، برای حل معادلهٔ (۱) به‌کار برد.

یعنی در گام اول مکعبی را رسم می‌کند که ضلع آن برابر x است و بدین‌ترتیب x^3 تجسم عینی می‌گیرد. از آن‌جایی که یک جسم سه‌بعدی را باید با یک جسم سه‌بعدی جمع کرد، bx نیز برای او حکم یک مکعب‌مستطیلی را دارد که ارتفاع آن برابر با ضلع مکعب تجسم یافته است.

این مکعب‌مستطیل را می‌توانیم با ابعاد z, y, x و با ضریب دل‌خواه n نشان دهیم کـه n می‌تواند هر عدد دل‌خواهی را به‌خود بگیرد. بدون این‌که از کلیت مسئله بکاهیم n را برابـر با ۳ درنظر می‌گیریم. حال می‌توانیم مکعب‌مستطیل $3xyz$ را به محـاذات مکعـب x^3 قـرار دهیم، اما چسباندن این مکعب‌مستطیل به مکعب x^3 چیزی نتیجه نمی‌دهد.

تارتاگلیا، برای رهایی از این بن‌بست، در دومین گام مکعـب‌مسـتطیل $3xyz$ را بـه سـه مکعب مستطیل متساوی تقسیم می‌کند و مطابق شکل کنار مکعب x^3 قرار می‌دهد.



شکل ۵

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود از این مجموع یک مکعب ناقص حاصـل مـی‌شـود کـه اندازهٔ حجم آن z^3 را می‌دانیم، بنابراین برای رسیدن به این مکعب باید به طرفین معادلهٔ (۱) مکعب به حجم y^3 را اضافه کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$z^3 = y^3 + (x^3 + 3xyz)$$

اما فرض کرده بودیم: $3yz = p$

از طرف دیگر حجم مکعب بزرگ برابر است با $q + y^3$ کـه از آن رابطـهٔ زیـر حاصـل می‌شود:

$$q + y^3 = z^3$$

سؤالی که اکنون مطرح می‌شود این است که آیا می‌شود دستگاه زیر را حل کرد.

$$\begin{cases} yz = \frac{p}{3} \\ z^3 = q + y^3 \end{cases}$$

از آن‌جا که این دستگاه معادل دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} yz = \frac{p}{3} \\ z^6 - qz^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3, \end{cases}$$

کافی است که یک معادله درجه‌دومی را برای یافتن z^3 حل کنیم و بعد ریشهٔ سـوم آن را برای یافتن z تعیین کنیم.

بنابراین معادلهٔ درجه‌دومی که z^3 یک ریشهٔ آن است به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(z^3 - \frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

این معادله یک ریشهٔ مثبت به صورت زیر دارد:

$$z^3 = \frac{q}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

و سرانجام خواهیم داشت:

$$x = z - y = z - \frac{p}{3z}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

هرگاه صورت و مخرج عبارت طرف راست را در مقدار زیر ضرب کنیم:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}}$$

با توجه به این‌که

$$\frac{q}{2}<\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

به فرمول زیر می‌رسیم که پاسخ معادلهٔ (۱) است:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}}$$

این همان فرمولی است که تارتاگلیا به‌دست آورد، ولی کاردان آن را منتشر کرد. این‌گونه بود که روش خوارزمی برای حل معادلهٔ درجه‌سوم (۱) راه‌گشا شد.

مشابه چنین روشی را کاردان، ریاضی‌دان هم‌عصر با تارتاگلیا، در کتابش برای حل معادلهٔ $x^3+6x=20$ به‌کار برده است. او برای این کار نخست مکعبی به ضلع x را می‌سازد، آن‌گاه 6x را تبدیل به سه مکعب‌مستطیل می‌کند که یکی از ابعادش مساوی x است. سپس آن‌ها را طوری کنار مکعب x^3 قرار می‌دهد که یک مکعب ناقص پدید آید. در این‌جا، کاردان از خوانندگان خود می‌خواهد «مکعب را به همان طریقی که عرب‌ها (دانشمندان اسلامی) و یا لئوناردو فیبوناچی مربع را [برای حل معادلات درجه‌دوم] کامل می‌کند کامل کنند».[۵]

این مطلب می‌رساند که کاردان و تارتاگلیا مستقیم یا از طریق فیبوناچی با اثر جبری خوارزمی آشنا بوده‌اند.

۸. نتیجه‌گیری

خوارزمی ریاضی‌دان نابغهٔ ایرانی، که از یک‌سو وارث ریاضیات یونانی و از سوی دیگر آشنا با دستورات یا الگوریتم‌های مردم بابل در حل برخی از معادلات درجه دوم بود، از

تلفیق این دانش‌ها برای نخستین‌بار علمی را به‌وجود آورد که پیش از وی در هیچ‌یک از تمدن‌های قدیمی سابقه نداشت. این علم همان است که امروزه علم جبر خوانده می‌شود و یکی از شاخه‌های علوم ریاضی به‌شمار می‌رود. این علم را که به طور خلاصه می‌توانیم نظریهٔ معادلات درجه دوم بنامیم، دارای همان ساختاری است که از یک نظریهٔ کاملاً علمی انتظار می‌رود. یعنی نه‌تنها دستور حل همهٔ معادلات درجه دوم را ارائه می‌دهد، بلکه اثبات هندسی این دستورات را نیز می‌آورد. این نظریه از طریق ترجمه‌های لاتینی کتابش در قرون وسطی وارد اروپا شد و انقلابی در علوم ریاضی به‌پا کرد.

نظریهٔ خوارزمی، که منشأ شرقی داشت و از ذهن یک ایرانی مسلمان برخاسته بود، پیش‌داوری‌های بعضی از فلاسفه و دانشمندان نژادپرست اروپایی را، که علوم دقیقه را به طور کلی «علوم اروپایی» می‌نامیدند و از این پندار ناصواب «اصل موضوعی» را برای تحقیر و استثمار دیگر کشورها ساخته بودند، باطل کرد و این حقیقت را می‌رساند که علم نژاد و قبیله نمی‌شناسد و متعلق به همهٔ انسان‌هایی است که در کشف رازهای جهان کوشیده‌اند.

پی‌نوشت

۱. رشدی راشد نظر پل تانری (P. Tannery) از دانشمندان نژادپرست فرانسوی دربارهٔ علوم اسلامی را چنین آورده است:

The distinctive mark of Western science, in its Greek origins as well as in its modern renaissance, is its conformity to rigorous standards; in contrast ,Oriental science in general, and Arabic science in particular, lets itself be carried away by empirical rules and methods of calculation, neglecting to verify the soundness of each step on its path. The case of Diophante illustrates this idea perfectly: as a mathematician, …

۲. عین نوشتهٔ رنان چنین است:

Dans la science et la philosophie, nous sommes exclusivement Grecs. Larecherche des causes, savoir pour savoir, est une chose dont il n'y a nulle trace avant la Grèce, une chose que nous avons apprise d'elle seule. Babylone a eu une science, mais elle n'a pas eu le principe scientifique par excellence, la fixité absolue des lois de la nature.

L'Égypte a su de n'a pas créé les Éléments d'Euclide. Quant au vieil esprit sémitique, il est de sa nature anti philosophique et anti-scientifique. Dans Job, la recherche des causes est presque présentée comme une impiété. Dans l'Ecclésiaste, la science est déclarée une vanité. L'auteur, prématurément dégoûté, se vante d'avoir étudié tout ce qui est sous le soleil et de n'y avoir trouvé que de l'ennui.

On parle souvent d'une science et d'une philosophie arabes, et, en effet,

pendant un siècle ou deux, au moyen âge, les Arabes furent bien nos maîtres ;mais c'était en attendant que nous connussions les originaux grecs. Cette science et cette philosophie arabes n'étaient qu'une mesquine traduction de la science et de la philosophie grecques (Kouloughli, 2007).

برای آگاهی بیش‌تر از دیدگاه رنان دربارهٔ علم اسلامی ← (Renan, 1883: 11).

۳. برای مثال ← (چالمرز، ۱۳۷۸: ١٤) و (کاپالدی، ۱۳۸۷: ۳۲–۳۳).

٤. اصطلاح علوم انعطاف‌پذیر را پروفسور برنارد ویتراک (B. Vitrac) برای دانش‌هایی که مبتنی‌بر تجارب شخصی‌اند و پشتوانهٔ استدلالی ندارند به‌کار برده است (Aghayani Chavoshi, 2006: 108).

۵. جملهٔ اول ترجمهٔ لاتینی کتاب حساب خوارزمی این است: «Dixit algotitmi» که ترجمهٔ «قال الخوارزمی» است.

٦. عین نوشتهٔ ابن یونس چنین است: «علم الهندسة الذی هو اصل العلوم الحقیقیة و اس بل مادة لها و اسطقس اذ نسبته الی سایر العلوم الحقیقیة نسبت الواحد الی العدد بل نسبة الروح الی الجسد» (نسخهٔ خطی شمارهٔ ۵۳۵۷، کتاب‌خانهٔ آستان قدس، صفحهٔ ۱).

۷. در ارائهٔ روش تارتاگلیا برای حل معادلهٔ درجه‌سوم از (Boopp, 2006) استفاده شده است.

۸. این مطلب کاردان را پارشال، یکی از مورخان ریاضی، در مقاله‌ای با عنوان «هنر جبر از خوارزمی تَا ویئت» آورده است. عین نوشتهٔ پارشال چنین است:

Here, Cardano asked his readers to complete the cubes formed on AB + BC, in just the same way the Arabs or Leonardo completed the square (Parshall, 1988: 160)

منابع

آقایانی چاوشی، ج. (۱۳۸۰). «پیدایش علم به مفهوم امروزی آن (معجزهٔ یونان)»، *آینهٔ میراث*، س ٤، ش ۳.

اینشتین، آلبرت (۱۳۷۰). *حاصل عمر*، ترجمهٔ ناصر موفقتیان، تهران: علمی و فرهنگی.

جعفرنژاد، علی (۱۳۸۵). «نظریه چیست؟ شش ویژگی برای نظریه»، *خردنامهٔ همشهری*، ش ۷.

چالمرز، آلن اف. (۱۳۷۸). *چیستی علم، درآمدی بر مکاتب علم‌شناسی فلسفی*، ترجمهٔ سعید زیباکلام، تهران: سمت.

خوارزمی (۱۹۳۹). *کتاب الجبر و المقابله*، تحقیق و تعلیق علی مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمد، القاهره.

خوارزمی (۱۳۶۲). *جبر و مقابله*، ترجمهٔ حسین خدیوجم، تهران: خوارزمی.

خیراندیش، الهه (۱۳۶۸). «مفهوم جبر در تاریخ جبر»، *نشر ریاضی*، س ۲، ش ۳.

راشد، رشدی (۲۰۱۰). *ریاضیات خوارزمی تأسیس علم الجبر*، ترجمهٔ د. نقولا فارس، بیروت: مرکز دراسات الوحدة العربية.

قربانی، ابوالقاسم (۱۳۷۵). *زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی از سدهٔ سوم تا سدهٔ یازدهم هجری*، تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

کاپالدی، نیکلاس (۱۳۸۷). *فلسفهٔ علم، تکامل تاریخی مفاهیم علم و پیامدهای فلسفی آن‌ها*، ترجمهٔ علی حقی، تهران: سروش.

Aghayani Chavoshi, J. (2006). ‘L’histoire des Mathèmatiques Grecques d’après Bernard Vitrac’, *Ayene-ye Miras New Series*, Vol. 4, No. 35, History of Science.

Anbouba, A. (1978). ‘L’Algèbre Arabe aux LX^{ème}et X^{ème} Siècles, Aperçu général’, *Journal for the History of Arabic Science*, Vol. 2, No.1.

Blanché, R. (1965). *L’axiomatique*, Paris: PUF.

Boopp, N. (2008). ‘La Méthode de Tartagtia, Comment Utiliser Les Volumes Pour Résoudre une équation du’, 3^{e} degré *L’ouvert,* No. 116.

Hughes, Barnabas B. (1986). *Robert of Chesters Latin Translation of al-Khwarizmi’s al- Jabr, A New Critical Edition*, Barnabas Bernard Hughes (ed.), Stuttgart: Steiner Verlag Wiesbaden.

Khwarizmi (1831). *The Algebra of Mohammed ben Musa*, Edited and translated by Frederic Rosen, Londer.

Khwarizmi (1915). *Robert of Chester’s Latin Translation of the Algebra of al–Khowarizmi,* With an Introduction, Critical Notes and an English Version by Louis Charles Karpinski, New York: Macmillan; London: Macmillan and Company Limited.

Kouloughli, D. (2007). ’Ernest Renan, Un Anti Sémitisme Savant’, *Histoire Epistémologie Langage*, Vol. 29, No. 2.

Neugebauer, Otto (1962). *The Astronomical Tables of al- Khwārizmī*, trans. Commentaries of the Latin Version, H. Suter (ed.), Copenhague: Herausgegeben und Kommentiert. (Supplemented by Corpus Christi College MS 283).

Parshall .H. K. (1988). ‘The Art of Algebra from al-Khwarizmi to viéte, A Study in the Natural Selection of Ideas’, *History of Science*, Vol. 26, No. 72.

Rashed, R. (2007). *Al-Khwarizmi Le Commencement de L’ Algèbre,* Texte établi traduit et Commenté par R. Rashed, Paris: Librairie Blanchard.

Renan, E. (1883). *L’islamisme et 1a Science,* Conférence Faite à la Sorbonne 1e 29 mars 1883, Paris: Calmann Lévy.

Rodet, Léon (1878). 'L'Algèbre d'al- Khwarizmi et les Methods Indienne et Grecque', *Journal Asiatique*, Série 7,11.

Samplonius, Y. D. (1987). 'Developments in the Solution to the Equation $cx^2 + bx = a$ from al-Khwarizmi to Fibonacci', *From Deferent to Equant, A Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E. S. Kennedy*, David A. King and Georg Saliba (eds.), (Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 500, New York 1987).

Unguru, S. (1979). 'Critiques and Contentions-History of Ancient Mathematics, Some Reflections on the State of the Art', *Isis*, Vol. 70.