فلسفهٔ علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال دهم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۹، ۱۱۹-۱۴۱

نقش قواعد مثلثاتی در عناصر معماری ایران
از دیدگاه غیاث‌الدین جمشید کاشانی

فاطمه فلاحی*

سعید میرریاحی، حسین سلطان‌زاده***، محمدمهدی رئیس سمیعی****

چکیده

کاربرد قواعد محاسباتی سهم عمده‌ای در هماهنگی نسبت‌ها و عناصر معماری دارد. علم هندسه و کاربرد آن یکی از اصلی‌ترین ویژگی‌های معماری ایران است و توسعهٔ آن در معماری ایران از سده‌های هشتم و نهم آغاز شد و تا قرن دهم ادامه یافت. آن‌چه از حیث مطالعات مثلثاتی عناصر معماری ایران در عصر تیموری مدنظر است بهره‌گیری از دیدگاه ریاضی‌دان و اندیشمند قرن نهم، غیاث‌الدین جمشید کاشانی[1]، در اندازه‌گیری، محاسبات، و قاعده‌مندکردن این عناصر است. یکی از دستاوردهای غیاث‌الدین تثلیث زاویه و دایره است که تکمیل‌کنندهٔ مثلثات و مقاطع مخروطی خیام است. هدف این پژوهش پاسخ به این پرسش است: آیا محاسبات و ایده‌های ریاضی‌دان ناموری چون کاشانی قابلیت به‌کارگرفته‌شدن در صنعت معماری را دارد؟ مبانی نظری پژوهش حاضر به‌دنبال پاسخ این

---

* دانشجوی دکتری تخصصی معماری، گروه معماری، دانشکدهٔ معماری و شهرسازی، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران، mehrnaz.ir@gmail.com

** دانشیار گروه معماری، دانشکدهٔ معماری و شهرسازی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران (نویسندهٔ مسئول)، saiid.mirriahi@gmail.com

*** دانشیار، گروه معماری، دانشکدهٔ معماری و شهرسازی، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران، h72soltanzadeh@gmail.com

**** استادیار، گروه معماری، دانشکدهٔ معماری و شهرسازی، دانشگاه گیلان، گیلان، ایران، r_samiei@guilan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۱۵، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۲

سوال است: آیا بین مباحث نظری و عملی هندسه و معماری ارتباط وجود دارد؟ در این پژوهش، براساس نسخ به‌جامانده از ریاضی‌دانان ایرانی، ریشهٔ قواعد محاسباتی و ترسیمی برخی عناصر معماری که از نظر پژوهش‌گر با قضیهٔ منلائوس مرتبط است توسط زبان برنامه‌نویسی پایتون در نرم‌افزار راینو ارزیابی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که محاسبات و ترسیمات کاشانی فقط تمرین عملی نظری نبوده است و از قوانین مثلثاتی در ایستایی و پایداری عناصر معماری که تا قبل‌ازآن برخی از آن‌ها تخریب می‌شدند استفاده شده است.

کلیدواژه‌ها: مثلثات و معماری، معماری ایران، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، قضیهٔ منلائوس.

۱. مقدمه

بخش چهارم رسالهٔ *مفتاح‌الحساب* کاشانی، *طاق و ازج*، از معدود رساله‌های نگاشته‌شده برای اصحاب معماری درباب هندسهٔ اشکال کروی در عناصر معماری است. شکل‌های کروی از منظر اندیشمندان ایرانی همانند شکل‌های مستقیم‌الخط شناخته می‌شوند، با این تفاوت که اضلاع آن‌ها کمان‌هایی از دوایر عظیمهٔ کوچک‌تر از نصف دایره‌اند. میزان کارآمدی سه‌ضلعی یا مثلث محیط بر این اشکال موضوعی است که برخی اندیشمندان پیش از غیاث‌الدین به بررسی آن پرداخته بودند. این اندیشمندان نسبت‌ها و روابطی را در مؤلفه‌های این اشکال هندسی کشف کرده بودند که قضایای هندسی مسطحه را روی اشکال کروی برقرار می‌ساخت. کاشانی در رسالهٔ *مفتاح‌الحساب* ضمن تکمیل این قضایا به تعمیم آن در صنعت معماری نیز پرداخت و راه‌کاری علمی در محاسبه و ترسیم برخی عناصر معماری ارائه کرد که موجب پایداری در رفتار سازه‌ای این عناصر شد.

خیام در ضمن بیان انتقادهای خود به کتاب *اصول* بر قضیهٔ نسبت مؤلفه شدیداً تأکید کرد، زیرا شکل قطاع که پایه و مبنای حل مسائل علم هیئت و اشکال و مثلثات کروی است براساس همین نسبت مؤلفه به‌دست می‌آید (خیام ۱۳۸۸: ۷۵). دانشمندان دورهٔ اسلامی (قرن چهارم ق و بعد از آن) قضیهٔ منلائوس[۲] را شکل‌القطاع[۳] نامیده‌اند (همان: ۲۰). یونانیان برای حل مثلثات کروی قضیهٔ منلائوس را به‌کار می‌بردند و قضیه‌ای مشابه آن در هندسهٔ مسطحه اثبات کردند (کندی ۱۳۳۲: ۳۳۴–۳۳۵). دانشمندان ایرانی برای بیان قضیهٔ منلائوس از مفهوم جیب[۴] (معادل سینوس امروزی) استفاده می‌کردند، اما منلائوس و دیگر دانشمندان یونان باستان این قضیه را به‌وسیلهٔ وتر دو برابر یک کمان[۵] بیان کرده‌اند (مهدوی ۱۳۹۰: ۱۹). موضوع رسالهٔ *وتر و جیب* کاشانی به‌دست‌آوردن جیب یک درجه است. او در این رساله به

تشکیل معادلهٔ جبری با استناد به قضایای هندسی و حل این معادله به‌روش تکرار پرداخته است. کاشانی برای ساخت این معادلهٔ جبری از قضیهٔ بطلمیوس (چهارضلعی محاط در دایره) و تثلیث کمان استفاده کرده است (قربانی ۱۳۶۸: ۱۷۶). کتاب *اشکال الکریة* از آثار منلائوس است و با استناد به گفتهٔ ابن‌ندیم، منلائوس پیش از بطلمیوس این کتاب را به‌رشتهٔ تحریر درآورده، زیرا بطلمیوس در *مجسطی* از او یاد کرده است (امینی ۱۳۹۲: ۳۲).

هدف مقالهٔ چهارم از رسالهٔ *مفتاح‌الحساب* کاشانی ارائهٔ راه‌کارهای علمی و محاسباتی طاق و ازج، گنبد، و مقرنس برای صنعت‌گران است، عناصری که تا پیش‌ازآن برخی شکسته می‌شدند. کاشانی در این رساله قوس‌های کمان‌ساز طاق و گنبد معماری را دسته‌بندی کرد و براساس اندازهٔ هر دهانه قوسی را پیش‌نهاد داد که از لحاظ ریاضی و معماری مناسب‌تر بود. میزان کارایی این رساله از «محاسبهٔ سطح و حجم ساختمان» تا «رویکردی علمی از منظر ریاضیات به معماری» موضوعی است که همواره درمیان پژوهش‌گران با اختلاف‌نظر همراه بوده است. ازاین‌رو، سؤال اصلی پژوهش میزان انعکاس اندیشه‌های علمی کاشانی در عناصر معماری است. این پژوهش برای پاسخ به این پرسش از دو منظر به مسئله می‌نگرد: نخست، تفسیر تاریخی و بررسی تکامل تدریجی آگاهی و ذهن اندیشمندان؛ دوم، بازنمایی ریاضی یا مدل‌سازی رایانه‌ای برای بررسی موضوع تا علوم تاریخی را با نگاهی باورمند سازمان‌دهی کند.

گام نخست این پژوهش بررسی اهمیت رسالهٔ *مفتاح‌الحساب* در رویکردی علمی به صنعت ساخت و اجرای طاق و گنبد معماری است که با جست‌وجوی ارتباط آخرین باب بخش چهارم این رساله یعنی *طاق و ازج* با رسالهٔ دیگر کاشانی *وتر و جیب* هم‌راه است. پژوهش در گام بعد بر سازگارساختن گزاره‌های قاعده‌مند ریاضی، مستخرج از رساله‌های کاشانی، با نرم‌افزارهای محاسباتی رایانه‌ای تمرکز دارد و براساس منطق نحو (دستور زبان اشکال) طرح‌واره‌های کاشانی را تجزیه و تحلیل می‌کند. بخش پایانی پژوهش، با مدنظر قراردادن قواعد ترسیمی و محاسباتی مطرح‌شده در رسائل کاشانی، چگونگی تأثیر اندیشه‌ها و ایده‌های او را در پدیدارشدن قواعد هندسی طاق و گنبد در دوران تیموری مشخص خواهد کرد.

قواعد ریاضیاتی و محاسباتی در رسالهٔ *مفتاح‌الحساب* کاشانی الگوی هندسی تولید فرم در عناصر معماری است. ازاین‌رو، روش پژوهش بر پایهٔ استدلال منطقی متکی بر گزاره‌های قاعده‌مند ریاضیات استوار است. ابزار ارتباط‌دهندهٔ این قواعد، علوم محاسباتی موضوع رسالهٔ *وتر و جیب* با زبان شکل‌های موضوع رسالهٔ *طاق و ازج*، زبان برنامه‌نویسی پایتون در

نرم‌افزار رایانه‌ای راینو است. پایتون علاوه‌بر توابع محاسباتی دارای پتانسیل شیءگرایی و نحو است که با استفاده از افزونهٔ گراس‌هاپر وارد نرم‌افزار سه‌بعدی راینو می‌شود. در این پژوهش، روش‌های اجرای قوس توصیف‌شده توسط کاشانی در مقالهٔ چهارم رسالهٔ *مفتاح‌الحساب* توسط زبان برنامه‌نویسی پایتون وارد فضای نرم‌افزاری راینو می‌شود و میزان مطابقت قوس‌ها با علوم محاسباتی، موضوع رسالهٔ *وتر و جیب*، محاسبه می‌شود. این روند رویکرد علمی کاشانی از منظر ریاضیات در معماری را مشخص می‌سازد.

۲. پیشینهٔ پژوهش

ترجمه و تحشیهٔ رسالهٔ ارزش‌مند غیاث‌الدین جمشید کاشانی *طاق و ازج* (کاشانی ۱۳۹۳)، آخرین باب مقالهٔ چهارم *مفتاح‌الحساب*، برای مقاصد عملی مساحی بناها و عمارات نوشته شده است. ترسیمات کاشانی در این رساله مقطع اغلب قوس‌های کمان‌ساز طاق و ازج تا آن زمان را شامل می‌شود. یوشکه‌ویچ و روزنفلد (۱۳۵۸) نتیجه گرفته‌اند که کاشانی در *مفتاح‌الحساب* کلیهٔ عمل‌های نجومی را که در جدول‌های دیگر وجود نداشته کشف کرده است و تردیدی نیست که رسالهٔ *وتر و جیب* به تعیین ثلث زاویه اختصاص دارد و کاشانی این رساله را اختصاصاً برای دقیق‌ترکردن جدول‌های مثلثاتی نوشته است. توجه به دانش ریاضیات در معماری، روش‌های به‌کاررفته در رسالهٔ *طاق و ازج*، دلایل تألیف رساله، باب‌ها، و مسائل آن پرسش‌هایی را دربارهٔ کاربرد هندسهٔ مثلثاتی و ریاضیات در معماری مطرح می‌کند. ازاین‌رو، به‌اختصار به روند تاریخی و تحولات ذهنی ریاضی‌دانان ایرانی‌ای اشاره می‌کنیم که پیش از کاشانی بر ترسیم و تدقیق اشکال کروی تمرکز داشتند.

اوزدورال (۱۹۹۸) شکوفایی علوم ریاضی در معماری را مربوط به مجالس گفت‌وشنود میان برخی ریاضی‌دانان بزرگ همانند ابوالوفا بوزجانی و اصحاب معماری دانسته است. وی روش ابوالوفا را انعکاسی می‌داند از ابتکارات او برای یافتن طریقی تا بتواند قضیه‌ای نظری را به هنرورزانی که به‌طبع با کارهای عملی سروکار داشتند تفهیم کند، نه این‌که آنان را وادار کند کلیات ریاضیات آن عهد را فراگیرند. با استناد به نتایج حاصل از پژوهش طاهری و ندیمی (۱۳۹۱) می‌دانیم که معماران پیش از ابوالوفا از دانش هندسهٔ مرتبط با حرفهٔ خود بی‌بهره نبودند؛ ولی دانش مکتوب ریاضیات معماری، آن‌گونه‌که او به تدقیق و عمومی‌کردن آن دست یافت، تا پیش از او (قرن چهارم) در جهان اسلام وجود نداشت. نتایج بررسی طاهری (۱۳۹۰)، طاهری و ندیمی (۱۳۹۱)، به‌همراه پژوهش‌گرانی چون بلوم

(Bloom 1993)، هولد (Holod 1988)، و صلیبا (Saliba 1999) نشان داد کـه رسـائل بوزجـانی برای اهل صنایع و ارتباط اصحاب معماری با متون ریاضی شفاهی کارآمـد اسـت و ارتبـاط ناچیزی میان اصحاب این دو قلمرو وجود دارد. این موضوع بحث‌برانگیـز در پـژوهش‌هـای دیگر طیفی از آرای متفاوت داشته است. پـژوهش‌گـران دیگـری چـون بولاتـف (Bulatov)، چرباچی (Chorbachi 1989)، اوزدورال (Ozdural 1998)، و نجیـب اوغلـو (Necipoglu 1995) بر نقش علـوم، متـون ریاضـی، و ریاضـی‌دانـان در معمـاری دوران اسـلامی تأکیـد دارنـد. اوزدورال (2000) با اشاره به پاره‌ای مسائل مطرح در رسائل بوزجانی به این امر مهـم دسـت یافته است که این طرح بعدها به‌کوشش عمر خیـام جامـهٔ عمـل بـه‌خـود پوشـید. اوزدورال (۱۹۹۸) به سند مهمی دربارهٔ حل مسئله‌ای هندسی توسط عمر خیام اشاره کرده است. نتـایج پژوهش وی نشان می‌دهد که خیـام دو راه‌حـل، مقـاطع مخروطـی و مثلـث قـائم‌الزاویـه‌ای معروف به «مثلث خیام»، برای این مسئله ارائه کرده است. اوزدورال پس از توضیح و تحلیـل خواص این مثلث و تناسب‌های گنبدخانهٔ شمالی مسجد جامع اصـفهان، درخاتمـه، بـه ایـن نتیجه رسیده که «به‌نظر می‌رسد طرح هندسی گنبدخانهٔ شمالی تمامـاً براسـاس مثلـث خیـام صورت گرفته است».

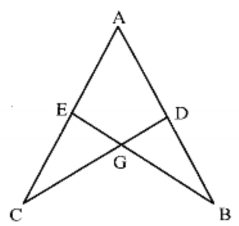
به‌طور کلی، از دید پژوهش‌گران، دانش ریاضیات معماری در اواخر سدهٔ چهارم با تـأثیر از فضای عقلانی فلاسفه و ریاضی‌دانان متولد شده است. بوزجانی با تدقیق و تدوین مسـائل هندسهٔ عملی موردنیاز صنعت راهی متمایز در بی‌نیازکردن اصحاب معماری از ریاضـی‌دانـان را آغاز کرد. طبق گفتهٔ اوزدورال این هدف با رویکرد مرزی خیام به ریاضیات تحقق یافـت. این دانش‌ها درحدود سه قرن به تثبیت خود پرداختند، اما نوآوری در آن‌ها وجود نداشت تـا در قرن نهم بعد از حملهٔ مغولان و آشفتگی ایـران، غیـاث‌الـدین جمشـید کاشـانی دانشـمند برجستهٔ ریاضیات در عصر تیموری ظهور کـرد. طـاهری و نورتقـانی (۱۳۹۰) بـا اسـتناد بـه رسالهٔ *طاق و ازج* کاشانی را دانشمندی با نگاه دقیق به معماری و صنعت می‌دانند کـه بـرای اندازه‌گیری کلیهٔ اشکال و احجام هندسی تقسیم‌بندی نسبتاً کـاملی ارائـه داده اسـت. نجیـب اوغلو (۱۳۹۷) جداول محاسباتی ازپیش‌آمادهٔ رسالهٔ کاشانی را بدون تأثیر در روند طراحـی و تنها برای آسان‌کردن محاسبات در کار معماران ذکر کرده اسـت. خیـری (۱۳۸۹) کاشـانی را نخستین کسی می‌داند که ایستایی و رفتار سازه‌ای قوس‌ها را دسته‌بنـدی کـرده و بـرای هـر دهانه، براساس اندازهٔ آن، قوسی را که از نظر ریاضی و معماری بهترین بـوده پـیش‌نهـاد داده اسـت. سـمپلونیوس (۲۰۰۰) صـحت محاسـبات مربـوط بـه قـوس‌هـا در جـداول رسـالهٔ

مفتاح‌الحساب را تا سه رقم اعشار ذکر کرده و جدول‌ها را برای تمام مقاصد علمی آن عصر پاسخ‌گو دانسته است.

باتوجه‌به چنین آرای هم‌سانی که همگی بر تأثیر رسالهٔ کاشانی در معماری و صنعت‌ها تأکید دارند، هدف پژوهش حاضر کشف منطق ریاضی نهفته در لایه‌های پنهان معماری ایران در دوران تیموری است، تا از این طریق به تبیین قواعد محاسباتی و ریاضیاتی‌ای دست یابد که در معماری ایرانی ریشه دارد. احیای منطق مثلثاتی ریاضیات در معماری ایران راه‌کارهای قابل‌استناد و راه‌بردهایی ارائه می‌دهد که می‌تواند ادامه‌دهندهٔ راه اندیشمندان ایران باشد.

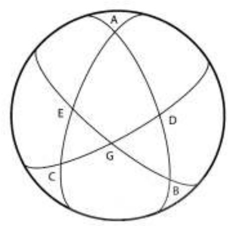
۳. قضیهٔ منلائوس و قواعد محاسباتی ترسیمی اندیشمندان ایران

ریاضی‌دانان قرون دوم و سوم هجری روش یونانیان را برای حل مثلثات در علم هیئت به‌کار بردند، اما در قرن چهارم هجری عده‌ای از علمای ایرانی به‌جای قضیهٔ منلائوس قضایایی کشف کردند که از قضیهٔ قبل ساده‌تر بود. در رأس این پیش‌گامان ابوالوفا بوزجانی قرار داشت (کندی ۱۳۳۲: ۳۴۰).



$$\frac{BD}{DA} = \frac{BG}{GE} \cdot \frac{EC}{AC}$$

تصویر ۱. شکل قطاع مسطح و نسبت بین اضلاع آن

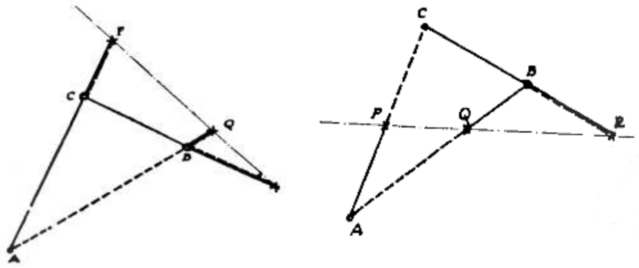


$$\frac{\sin\widehat{BD}}{\sin\widehat{DA}} = \frac{\sin\widehat{BG}}{\sin\widehat{GE}} \cdot \frac{\sin\widehat{EC}}{\sin\widehat{AC}}$$

تصویر ۲. شکل قطاع کروی و نسبت بین کمان‌های آن

شکل قطاع در ریاضیات دورهٔ اسلامی (قرن چهارم و بعد از آن) به دو چیز اطلاق می‌شد: اول، شکلی که از تقاطع چهار پاره‌خط (تصویر ۱) یا چهار کمان از دوایر عظیمه (تصویر ۲) روی سطح کره حاصل می‌شود؛ دوم، نسبتی است که بین پاره‌خط‌ها یا کمان‌های این شکل برقرار است (مهدوی ۱۳۹۰: ۱۸).

کار بدیع منلائوس برقراری تشابه میان اشکال مسطح و کروی است تا قضایا را روی سطح کره اثبات کند (امینی ۱۳۹۲: ۳۶). روابطی که در تصاویر به آن‌ها اشاره شد «نسبت مؤلفه» نام دارد. در ریاضیات این دوران مفاهیم کسری به‌صورت امروزی وجود نداشت، بلکه به‌جای محاسبهٔ کسرها و کار با نسبت‌ها از نسبت مؤلفه استفاده می‌شد. در نسبت مؤلفه ارزش مکانی حائز اهمیت است؛ ازاین‌رو جابه‌جایی مقادیر آن مستلزم استفاده از قضایای دیگر بوده است.



تصویر ۳. نسبت مؤلفه در قضیهٔ منلائوس

(AP*BQ*CR=AQ*BR*CP)

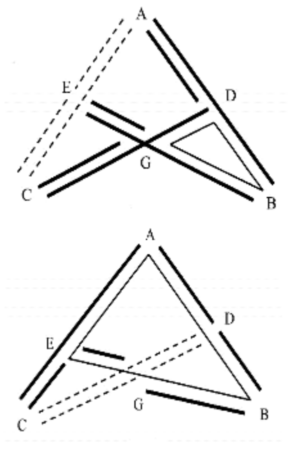
منلائوس برای انجام چنین کاری مقالهٔ اول رسالهٔ خود را با قضایایی درمورد مثلث کروی تنظیم می‌کند، چنان‌که اقلیدس نیز مقالهٔ اول *اصول* را برای مثلث‌های مسطحه تنظیم کرده بود (همان: ۳۶). قضیهٔ منلائوس (مقالهٔ اول کتاب *اشکال‌الکریة*) را می‌توان این‌گونه مطرح کرد: هرگاه قاطعی (PQR) سه ضلع مثلث (ABC) را قطع کند هر ضلع به دو قطعه (داخله یا خارجه) تقسیم می‌شود و از این شش قطعه حاصل‌ضرب آن سه خط که انتهای مشترک ندارند مساوی است با حاصل‌ضرب سه قطعه خط دیگر (تصویر ۳) (کندی ۱۳۳۲: ۳۳۵). بدیهی است از جابه‌جایی طرفین تساوی نسبت بین اضلاع و به‌تبع آن، کمان‌ها حاصل می‌شود، مطابق آن‌چه علمای ایران براساس قوانین جبری کشف کرده‌اند.

نصیرالدین طوسی نشان داده است که تمام نسبت‌های مؤلفه‌ای را که می‌توان برای شکل‌القطاع نوشت از دو نسبت مؤلفه به‌دست می‌آید:

$$\frac{BD}{DA}=\frac{BG}{GE}\cdot\frac{EC}{AC} \quad (۱)$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BE}{EG}\cdot\frac{GC}{CD} \quad (۲)$$

وی دو نسبت یک (با استناد به تصویر ۳ سمت راست) و دو (با استناد به تصویر ۳ سمت چپ) را مطابق آن‌چه بطلمیوس ذکر کرده است به‌ترتیب «تفصیل بطلمیوس» و «ترکیب بطلمیوس» نام‌گذاری می‌کند و به‌طور مشابه نسبت ترکیب بطلمیوس برای حالت کروی (تصویر ۲) حاصل می‌شود (مهدوی ۱۳۹۰: ۲۰). طبق تعریف، شکل قطاع مسطحه (تصویر ۴) از چهار خط (AB, BE, AC, CD) تشکیل شده است که دوبه‌دو یک‌دیگر را در شش نقطه (A, B, C, D, E, G) قطع کرده‌اند. این چهار خط ارکان شکل قطاع‌اند. بنابر تعریف، نسبت مؤلفه از تلاقی یک مثلث و خط حاصل می‌شود. اگر در شکل دوم تصویر چهارم DGC را قاطع مثلث ABE بدانیم، بنابر قضیهٔ منلائوس، بین قاطع و مثلث نسبت AC*GE*BD=DA*BG*EC برقرار است. از جابه‌جایی طرفین تساوی طبق قوانین کشف‌شدهٔ علمای ایران در جبر و مقابله، نسبت بین اضلاع مطابق نسبت اول (تصویر ۱) حاصل می‌شود و از تناظر زوایای مثلث کروی و مسطحه نسبت‌های مؤلفه به همین طریق بر روی سطح کروی (تصویر ۲) قابل‌اثبات می‌شود. اگر در شکل اول تصویر دوم AEC را قاطع مثلث BDG بدانیم، بنابر قضیهٔ منلائوس بین مؤلفه‌های قاطع و مثلث نسبت AB*EG*CD=AD*BE*GC برقرار است. از جابه‌جایی طرفین تساوی طبق قوانین کشف‌شدهٔ علمای ایران در جبر و مقابله، نسبت بین اضلاع طبق نسبت دوم مؤلفهٔ نصیرالدین طوسی حاصل می‌شود. قانون دیگر قابل‌استنباط از قضیهٔ منلائوس عدم مشارکت رکن قاطع و ارکان مثلث (ترسیم‌شده با خط‌چین و خط نازک در تصاویر ۴ و ۵) در قضیهٔ نسبت مؤلفه‌هاست.

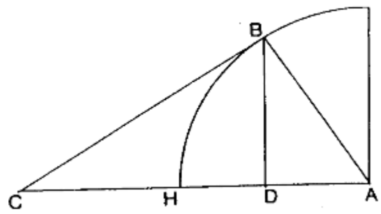


تصویر ۴. تفکیک شکل قطاع به قاطع و مثلث

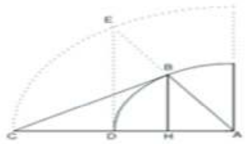
اهمیت کار دانشمندان ایرانی (ابوالوفا، ابونصر، و خجندی) در توجه به ارتباط میان قوس‌ها و زوایای کروی با جیب (سینوس) و ظل (تانژانت) و سایر توابع مثلثاتی بود. پیشرفت دیگر آنان اثبات وجود رابطه بین زوایا و اضلاع هر مثلث کروی است (کندی ۱۳۳۲: ۳۴۱). راه‌حل ابوالوفا برای اثبات قضیهٔ فیثاغورث نه مانند خوارزمی بود و نه مانند اقلیدس. وی به‌خوبی می‌دانست که این راه‌حل‌ها برای هنرورزان آن‌چنان انتزاعی است که نمی‌توانند از آن‌ها سر درآورند. درعوض، ابوالوفا با تکیه بر ابتکارات خود مبنی‌بر تضعیف مربع و تثلیث زاویه قضیهٔ مطلقاً انتزاعی و نظری را به هنرورزانی تفهیم کرد که به‌طبع با کارهای عملی سروکار دارند، بدون آن‌که آنان را وادار کند تا کلیات ریاضیات آن عهد را فراگیرند. طبق شواهد موجود، قضیهٔ منلائوس سرآغاز آفرینش طرح‌های موردبحث این پژوهش در آثار معماری شد. سند مهم دیگری که در همین زمینه در رسالهٔ اوزدورال به آن اشاره شده رسالهٔ بدون عنوان فیلسوف و ریاضی‌دان مشهور ایرانی، عمر خیام، است. راه‌حل واسط (مثلث خیام) روش دیگری برای درک بهتر هنرورزان از مسائل هندسی است. مثلثی که خواص آن ذکر شد دارای نسبتی هارمونیک است. تعریف ریاضی از ارتباط درست بین اندازه، موضع، و شکل اجزای گوناگون یک کل تساوی نسبت‌هاست. حال باید دید این مقوله چگونه در مثلث خیام به‌کار رفته است.

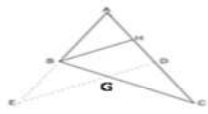
۴. جایگاه مثلث خیام در علوم محاسباتی اندیشمندان ایران

اوزدورال معتقد است روش‌های ابوالوفا برای حل مسئلهٔ صنعت‌گران در شکست طاق‌ها ناکام ماند، زیرا صرفاً به صنعت‌گران نشان می‌داد که چگونه می‌توانند مشکل را به‌روشی موجه حل کنند. گرچه برتری ابوالوفا در ایجاد رابطهٔ میان نظریه و عمل است، اما دیدگاه‌های خیام درمورد عرف هندسه با اتکا بر ادعاهای نظری‌اش به عمل نزدیک بود (Ozden 2015: 3). خیام با ذکر این موضوع که بیش‌تر مخاطبان او افرادی‌اند که با کارهای عملی سروکار دارند می‌کوشد تا روشی پیدا کند که در آن حتی‌المقدور از مقاطع مخروطی کم‌تر استفاده شود تا درک آن برای افراد غیرریاضی‌دان آسان‌تر باشد (اوزدورال ۱۳۸۰: ۱۹۵). این قواعد برای اهل تجربه و عمل ارائه شد، اما درنهایت قبل از به‌پایان‌رساندن آن خیام دریافت که اصحاب صنایع درصورتی‌که مایل باشند خودشان این کار را انجام دهند به مقدماتی از اصول و مفاهیم مقاطع مخروطی نیاز دارند و به همین دلیل روش واسط روش دوم خیام برای حل مسائل مطرح‌شده برای اصحاب صنایع بود.



تصویر ۵. مثلث خیام



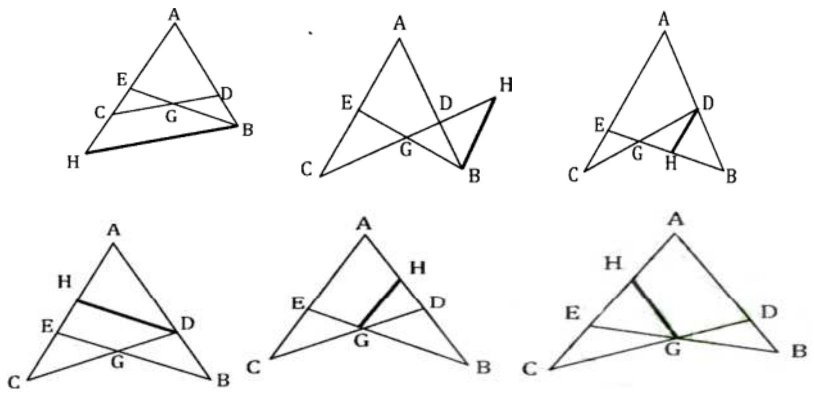


تصویر ۷. برهان شکل قطاع در حالت مسطحه

تصویر ۶. روند تبدیل مثلث خیام به قضیهٔ منلائوس

عمر خیام این مسئله را این‌گونه مطرح ساخت: یک ربع دایره به مرکز A را در نقطهٔ B چنان تقسیم کنیم که اگر خط BD عمود بر شعاع AH ترسیم شود $\frac{AH}{BD} = \frac{AD}{DH}$ شود. (تصویر ۵) (Ozdural 1998: 701). خیام روش مرزی حل این مسئله را به‌شیوه‌ای دیگر مطرح کرد که به معرفی «مثلث خیام» منتهی شد (تصویر ۵). وی برای معرفی ساختار مثلث قائمهٔ ABC جمع عمود و ضلع کوچک این مثلث را برابر وتر قرار داد (AC=AB+BD)، و در رابطه‌ای دیگر ضلع میانه مثلث را برابر مجموع ضلع کوچک‌تر و AD قرار داد (BC=AB+AD) (Ozden 2015: 53). آن‌گاه AD را برابر با مقدار دل‌خواه ۱۰ و BD را برابر با X فرض کرد و مسئله را به معادلهٔ درجهٔ سوم $X^3+200X=20X^2+2000$ تبدیل کرد (Ozdural 1998: 702). هرچند خیام برای استخراج این معادله از ترسیمات بسیار پیچیده‌ای بهره می‌برد، اما اثبات آن باتوجه‌به قوانین محاسباتی و پایهٔ مثلثاتی حال حاضر کار چندان پیچیده‌ای نیست. با استناد به روابط مثلثاتی می‌توان گفت که جواب حل این معادله نقطه‌ای است که باید تانژانت زاویهٔ ۵۷ درجه باشد. این قوانین به‌همراه بسط و توسعهٔ آن توسط کاشانی از مباحثی است که درادامه به آن پرداخته خواهد شد.

جهت کشف این تناسبات هارمونیک، مثلث ABC خیام را طوری بسط می‌دهیم که با مثلث متناظر و متساوی ADE شکل پایه و اولیهٔ قضیهٔ منلائوس حاصل شود (تصویر ۶). برای این منظور به مرکز A و شعاع AC کمانی رسم می‌کنیم تا در راستای AB نقطهٔ E حاصل شود. اجزای این دو مثلث نظیربه‌نظیر با هم برابرند. AB=AD شعاع کمان کوچک‌تر، AC=AE شعاع کمان بزرگ‌تر، و A=A زاویهٔ مشترک بین دو ضلع است. بنابراین، دو مثلث برابرند و ED=BC. با حذف خطوط کمان‌ها خطوط حاصل‌شده شیوهٔ برهان شکل قطاع در حالت مسطحه خواهد شد (تصویر ۷). در این تصویر اگر ADE مثلث اصلی و BC قاطع باشد، از برخورد قاطع با مثلث اصلی مثلث دوم BGE به‌نام مثلث خنثی حاصل می‌شود. در این برهان از یکی از اضلاع مثلث خنثی (مثلاً B) خطی موازی یکی از ارکان مثلث اصلی (مثلاً BH) خارج می‌شود تا رکن دیگر مثلث در نقطهٔ H قطع شود. از هر مثلث خنثی به شش طریق می‌توان خطوط موازی ترسیم کرد (تصویر ۸).



تصویر ۸ شش روش برهان شکل قطاع، **ABE** مثلث اصلی، **CD** قاطع، و **BGD مثلث خنثی**

ترسیم این خطوط موازی مثلث‌های متشابه در حالت‌های مختلفی ایجاد می‌کنند. در تصویر ۸ با ترسیم خط موازی BH با رکن DE از نقطهٔ B قوانین ذیل حاصل می‌شود:

$$\Delta \mathrm{ABH} \sim \Delta \mathrm{AED} \Rightarrow \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{AB}}{AE}$$

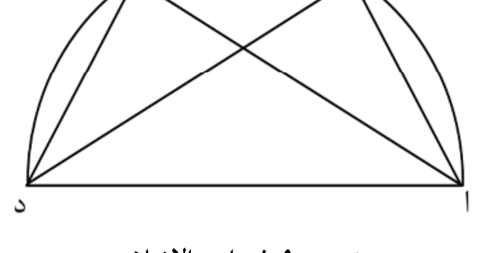
$$\Delta \mathrm{CBH} \sim \Delta \mathrm{CGD} \Rightarrow \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{GD}} = \frac{\mathrm{CG}}{CB}$$

با حذف BH از طرفین تساوی بالا و ضرب آن‌ها در هم خواهیم داشت:

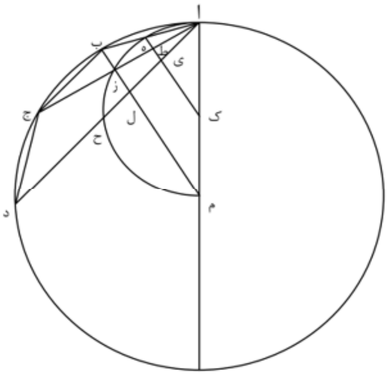
$$\frac{DE}{GB} = \frac{AE}{AB} * \frac{CG}{CB}$$

نسبت مؤلفهٔ مستخرج از این شکل‌القطاع با نسبت مؤلفهٔ قضیه منلائوس مطابقت دارد و این مهم استفادهٔ خیام از مفاهیم جبری در راه‌حل مرزی برای تعیین نسبت مؤلفه‌های اضلاع و به‌دنبال آن راه‌حل واسط در تعیین زاویه را مشهود می‌سازد.

کاشانی برای محاسبهٔ مساحت اشکال هندسی دیگر، نظیر مثلث متساوی‌الاضلاع و پنج‌ضلعی تا شانزده‌ضلعی منتظم، اعدادی را حساب کرده تا برای محاسبهٔ مساحت این اشکال، مربع ضلع آن را در عدد مذکور ضرب کنند (کاشانی ۱۳۹۳: ۲۱). محاسبهٔ وتر ثلث یک زاویه با استفاده از معادلهٔ جبری از روش‌هایی است که جمشید کاشانی برای حل مسئلهٔ تثلیث زاویه عرضه کرده است. پس از او دیگر ریاضی‌دانان، مانند قاضی‌زادهٔ رومی، رساله‌هایی برمبنای این رسالهٔ کاشانی تألیف کردند. میرزا ابوتراب نطنزی، ریاضی‌دان عصر قاجار، نیز به این مسئله پرداخته است. روش او اساساً هندسی است و از لحاظ ریاضی با روش جبری جمشید کاشانی هم‌ارز است (دوست‌قرین ۱۳۸۸: ۱). در *بیان استخراج جیب یک درجه*، تألیف قاضی‌زادهٔ رومی، آمده است: «ذی‌اربعه‌الاضلاعی که در دایره‌ای واقع شود مجموع مسطح ضلعین متقابلین او مساوی مسطح قطرین او است» (تصویر ۹) (سوادی ۱۳۸۷: ۷۷). در جایی دیگر ذکر شده است: «دایرهٔ اب‌جد به‌مرکز م رسم کنیم و هریک از قوس‌های اب، ب‌ج، جد به‌قدر دو[۶] درجه فصل کنیم و اوتار اب، ب‌ج، جد، اج، اد وصل کنیم و قطر ام اخراج کنیم و بر منصف ام، یعنی بر نقطهٔ ک، نصف دایرهٔ ام رسم کنیم. لامحاله اب، اج، اد را تنصیف کند بر نقطه‌های ه ز ح، به‌جهت آن‌که اقطاری که از نقطهٔ م بر این نقطه‌های سه‌گانه می‌آید عمود باشد بر هریک از این اوتار سه‌گانه به‌شکل سی‌ام از مقالهٔ سیم» (تصویر ۱۰) (همان: ۷۷–۷۸).



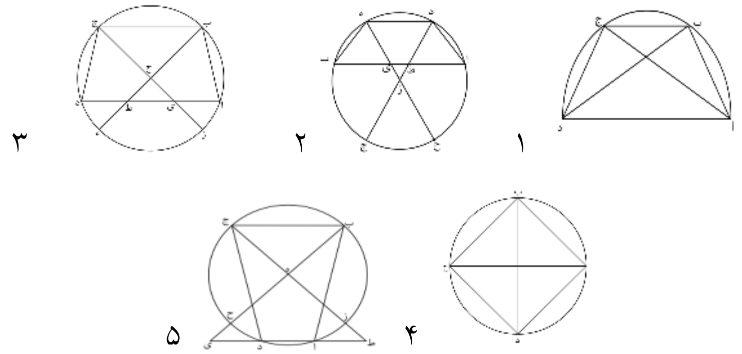
تصویر ۹. ذی اربعه‌الاضلاع



تصویر ۱۰. قطاع قائمه مستخرج از نقاط سه‌گانه

و به این صورت خطوطی قائمه از مرکز دایره بر این نقاط سه‌گانه فرود می‌آید. کاشانی با همین قواعد به محاسبهٔ جیب یک درجه دست یافت. وی درابتدا ثابت کرد کمان‌های ایجادشده بر دایرهٔ کوچک‌تر نصف کمان‌های ایجادشده بر روی دایرهٔ بزرگ‌ترند و با تکیه بر جیب سه درجه (ایجادشده بر روی دایرهٔ کوچک) به محاسبهٔ جیب یک درجه نائل گشت. مثلثی شبیه به مثلث خیام اما با زاویهٔ ۶۰ درجه (مثلث خیام دارای زاویهٔ ۵۷ درجه بود) در ترسیمات کاشانی مشهود است. به‌نظر می‌رسد تثلیث زاویه تلاشی است برای به‌دست آوردن چندضلعی‌های منتظم و برای حل آن دانش مقاطع مخروطی لازم است.

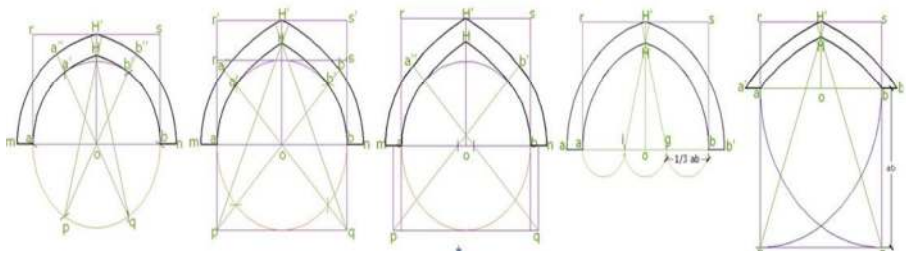
کاشانی جیب یک درجه را برحسب جیب سه درجه از راه حل جبری و حل معادلهٔ درجهٔ سومی به صورت $aX=X^3+b$ محاسبه کرده است (دوست‌قرین ۱۳۸۸: ۲۵).



تصویر ۱۱. پنج حالت تشریح هندسی تثلیث کمان توسط ابوتراب نطنزی

ابوتراب پس از تشریح روش کاشانی در تثلیث کمان روش خود را در پنج حالت مختلف (تصویر ۱۱) ذکر کرد. روش اثباتی برای سه حالت اول، سوم، و پنجم یکسان و

برای دو حالت دوم و چهارم بدیهی است (همان: ۲۶). در حالت اول، طبق اثبات کاشانی، در هر چهارضلعی محاط در دایره مجموع حاصل‌ضرب اضلاع مقابل برابر است با حاصل‌ضرب دو قطر (سوادی ۱۳۸۷: ۹۶). در حالت دوم (شکل دوم تصویر ۱۲) قوس‌های BC، AB، و CD را برابر در نظر می‌گیریم؛ بنابراین، وترهای مقابل به آن‌ها نیز با یک‌دیگر برابرند. هم‌چنین قوس‌های روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی O نیز با هم برابرند؛ درنتیجه زاویهٔ CDA نصف قوس AC است و با زاویهٔ COB برابر است (دوست‌قرین ۱۳۸۸: ۲۶–۲۷).



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

تصویر ۱۲. پنج روش ترسیم قوس برگرفته از کتاب *مفتاح‌الحساب* کاشانی

شیوهٔ ترسیم اشکال بی‌ارتباط با قواعد هندسی تثلیث کمان به‌نظر نمی‌رسد. نسبت مؤلفه‌ها از قرون سوم و چهارم به بعد همواره به‌عنوان برهانی اثباتی و کمی‌کنندهٔ ترسیمات هندسی مسائل بسیاری را مرتفع ساخته است. بعد از آشنایی با مثلث خیام و ارتباط آن با قضیهٔ منلائوس و تدقیق آن توسط کاشانی موارد استعمال آن‌ها را در معماری ایران جست‌وجو خواهیم کرد. درادامه، به عناصر معماری‌ای اشاره خواهد شد که این قضایا در نظام‌مندساختنشان مؤثر بوده‌اند. بدیهی است که هدف این پژوهش دست‌یافتن به منطق ریاضی نهفته در این عناصر است.

۵. قواعد محاسباتی و ترسیمی کاشانی در طاق و گنبد معماری

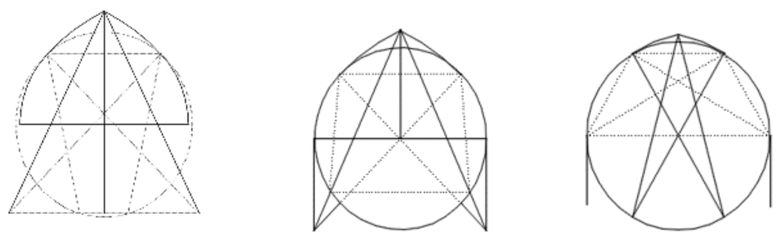
طرح‌های پیچیدهٔ هندسی که زینت‌بخش بناهای تاریخی ایران‌اند به‌گونه‌ای پیوند خورده‌اند تا ترکیب‌های بی‌شماری را بر روی دیوارها و نقش و نگارهای دل‌فریب مقرنس‌ها به‌وجود آورند. علم ظریف هندسه نه‌تنها در تزئینات بلکه در ترکیبات هندسی سازه‌ای بنا ازجمله گنبدها و قوس‌ها تأثیر چشم‌گیری داشته است. البته به‌راحتی می‌توان چنین اظهارنظری را

اغراق‌آمیز دانست یا حتی رد کرد؛ اما باید اذعان کرد استدلالی که اساس رابطهٔ مشترک بین تکامل هندسه و معماری را تشکیل می‌دهد می‌تواند نقیض این فرض باشد که معماران هنرورز فاقد هرگونه نبوغ هندسی بودند. پیوندی آشکار میان هندسه و معماری، توصیف‌های غیاث‌الدین جمشید کاشانی در کتاب *مفتاح‌الحساب* راجع‌به مقرنس، و مساحت سطح و حجم طاق، ازج، و گنبدهاست. درادامه، توصیف‌های مربوط به طاق و گنبد ذکرشده در معماری را با استناد به قواعد زبان اشکال در علوم محاسباتی تحلیل خواهیم کرد.

در تعریف غیاث‌الدین جمشید کاشانی قوسی که آن را قوس حقیقی (شکل دوم تصویر ۱۳) می‌نامد پوششی است که روی دو تکیه‌گاهی قرار می‌گیرد که بین دو خط موازی واقع شده‌اند و سه روش ترسیمی اول[۷] از پنج بخش[۸] تشکیل یافته‌اند (دولد سمپلونیوس ۱۳۸۴: ۶۳). کاشانی مبنایی را برای ترسیم طاق‌ها ارائه داده است که می‌توان با تقسیم دایره به‌روش اول و دوم به عددهای دیگری دست یافت و هم‌چنین با تقسیمات دیگر قطر دایره در روش سوم و چهارم گونه‌های دیگر طاق را ترسیم کرد (تصویر ۱۲) (طاهری و نورتقانی ۱۳۹۰: ۱۲۴). کاشانی متذکر می‌شود که می‌توان کمان‌ها را حول نقاط دیگر بر روی خطوط داخل و خارج نیم‌دایره قرار داد؛ اما محاسبات آن پیچیده‌تر خواهد شد (دولد سمپلونیوس ۱۳۸۴: ۶۵). در سه روش اول این ترسیمات قواعد موجود در نسبت مؤلفه‌ها که برپایهٔ شکل‌القطاع (قضیهٔ منلائوس) شکل گرفته‌اند و فرم برش‌خوردهٔ لوزه در رأس طاق به‌چشم می‌خورد؛ هم‌چنین، میزان تأثیر پنج حالت تشریح تثلیث کمان (تصویر ۱۱) کاشانی که توسط ابوتراب نطنزی هندسی شدند در ترسیم این کمان‌ها قابل‌ارزیابی به‌نظر می‌رسد. قوس‌ها در واقعیت تنوع بیش‌تری از پنج نوع معرفی‌شده توسط کاشانی دارند. قابل‌ذکر است که کاشانی به مقاطع بیضی‌شکل برای قوس‌ها اشاره‌ای نکرده است. اگر قوس‌هایی غیر از پنج مدل ارائه‌شده بررسی شوند، باید نزدیک‌ترین مدل به قوس را اختیار کرد. گولومبیک و ویلبر از مقایسهٔ قوس‌های کاشانی و قوس‌های واقعی دوران تیموری دریافتند که هدف کاشانی محاسبهٔ سطح و حجم بوده است، اما به‌دلیل نبود اطلاعات کافی درمورد اجرای آن توسط معماران اظهارنظر نکرده‌اند، و این به این معناست که محاسبه‌ای ساده ما را به تقریبی ظریف رهنمون می‌سازد که هدف نهایی است و با استناد به آن می‌توان این ترسیمات را توسط قواعد تثلیث کمان کاشانی به دیگر قوس‌ها تعمیم داد. برای مثال، علاوه‌بر نسبت مؤلفه‌هایی که در سه روش اول در ترسیمات کاشانی مشاهده می‌شود دو روش اول قابل‌انطباق با حالت اول و سوم تثلیث کمان است که خود توسط

حالت پنجم بسط داده شده‌اند و روش سوم ترسیم قوس قابل‌انطباق با حالت پنجم تثلیث کمان است که طبق آن‌چه قبلاً ذکر شد، هندسه‌ای بدیهی ایجاد کرده‌اند. کاشانی کتاب *مفتاح‌الحساب* خود را با شرح مثلث و قواعد حاکم بر آن آغاز کرده و برای ریاضی‌کردن عناصر معماری از همان قواعد بهره برده است. بنابراین، وجود رابطه میان قوانین مثلثاتی و عناصر معماری بدیهی به‌نظر می‌رسد.

در بخش قبل سعی کردیم نشان دهیم که کاشانی چگونه ضرایب قوس‌ها را به‌دقت محاسبه کرده است. دهانهٔ هر قوس منشأ و اساس کلیهٔ قوانین برای به‌دست‌آوردن ارزش نسبت‌ها به‌منظور قاعده‌مندسازی مشخصات مشتق‌شده از هر پوسته است. در این‌جا تعیین سه پارامتر اصلی نقاط مرکزی و موقعیت شکست بالای قوس ضروری است؛ اما تجزیه و تحلیل طاق‌ها و گنبدها مستلزم شناخت قوس‌هایی است که این عناصر با حرکت و دورانشان حاصل می‌شوند. برای تسهیل در ارائه و تنظیم سازوکاری هندسی، علاوه‌بر قضیهٔ منلائوس، سیستمی مبتنی‌بر پنج حالت هندسی تثلیث کمان پیش‌نهاد می‌شود که توسط ابوتراب نطنزی از دست‌نوشته‌های کاشانی تشریح شده است (تصویر ۱۳). در این مطابقت از اتصال نقاط تلاقی قوس‌ها و خطوط کمان‌ساز با یک‌دیگر حالت مختلف تثلیث کمان استخراج شده است. این عملکرد برای انعطاف‌پذیری تجزیه و تحلیل و تعریف قواعد هندسی تولید نمونه‌های متداول برای طاق و گنبد کمک‌کننده خواهد بود.



تصویر ۱۳. تطبیق قوس‌های مستخرج از کتاب *مفتاح‌الحساب* (خطوط ممتد) و اصول هندسی تثلیث کمان (خطوط منقطع)، تصاویر از سمت راست ۱. تطبیق قوس نوع اول و حالت اول تثلیث کمان؛ ۲. تطبیق قوس نوع دوم و حالت سوم تثلیث کمان؛ ۳. تطبیق قوس نوع سوم و حالت پنجم تثلیث کمان

دو روش نخست کاشانی قوس‌های سه‌مرکزی را به‌وجود می‌آورد. در روش نخست، زاویه‌ای که دو قسمت قوس را تقسیم می‌کند ۶۰ درجه است. روش دوم مستلزم آن است که دایره را به هشت قسمت تقسیم کنیم تا نتیجهٔ آن زاویهٔ صاعد ۴۵ درجه باشد. اختلاف اساسی میان دو نوع طاق در انتخاب زاویهٔ صاعد و قوس دوم قرار

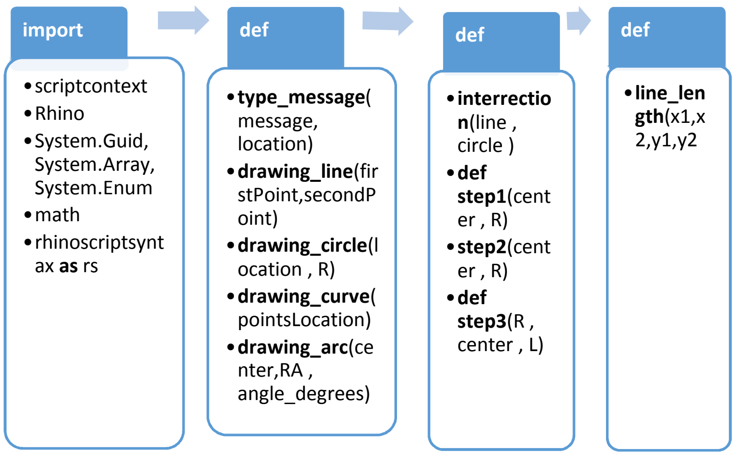
دارد (ویلبر و دیگران ۱۳۷۴: ۲۱۱). زاویهٔ ۶۰ درجه برعکس زاویهٔ ۴۵ درجه در پای طاق شیب‌دارتر، و در نقطهٔ رأس کم‌عمق‌تر است. اگر مرکز دایره در قوس روش دوم بر روی پایهٔ عمودی قرار گیرد رأس طاق بلندتر و شیب‌دارتر خواهد شد. در مقایسهٔ نمونه‌های واقعی طاق‌های تیموری با سرمشق‌هایی که کاشانی به توصیف آن پرداخته است می‌خواهیم به این پرسش پاسخ دهیم: آیا کاشانی به‌درستی به عملیات ریاضیات در معماری توجه کرده است یا رسالهٔ او فقط تمرین عملی و نظری بوده است؟

۶. ارزیابی سرمشق‌های کاشانی با زبان برنامه‌نویسی پایتون

بررسی مطالعات موجود نیازمند آزمون‌های مدل‌های فیزیکی است. ازاین‌رو، سه روش اول اجرای قوس را که کاشانی در کتاب *مفتاح‌الحساب* به توصیف آن پرداخته است به‌وسیلهٔ زبان برنامه‌نویسی *پایتون* وارد فضای نرم‌افزاری راینو کردیم و میزان مطابقت میان قوس‌های ترسیم‌شده با اصول هندسی تثلیث کمان را ارزیابی کردیم. در این روند، تمرکز بر ترسیم قوس‌ها دقیقاً براساس روش ترسیم در کتاب *مفتاح‌الحساب* بود و درانتها اصول هندسی ذکر شده (تصویر ۱۳) درمیان نقاط کلیدی این قوس‌ها ارزیابی شد.

زبان برنامه‌نویسی *پایتون* پتانسیل‌های جدیدی با قابلیت شیءگرایی و نحو (دستور زبان اشکال) برای برنامه‌نویسی در نرم‌افزار راینو دارد (Rutten 2011: 1). اسکریپت‌ها در این برنامه پرونده‌های متنی‌اند که به‌طور هم‌زمان و برخط تفسیر می‌شوند. اسکریپت‌ها قابلیت کنترل دارند و این کنترل اسکریپت را قادر می‌سازد تا دستورالعمل خاصی را اجرا یا تکرار کند (ibid.: 3). ازاین‌رو، در اسکریپت روش اول ابتدا کدهای ترسیمی راینو و محاسبات ریاضیاتی فراخوانی (import) شدند و برای ساده‌کردن تماس به آن‌ها نام مستعار داده شد. این روند با اعلام توابع (def) اصلی ادامه یافت. تابع اول خلق آبجکت‌ها است و اگر آبجکت‌ها ایجاد نشوند برای جلوگیری از بروز خطا زیر روال‌ها متوقف می‌شوند. به‌دنبال تابع اول چهار تابع طبق توصیف کاشانی ترسیم خط (دهانهٔ طاق)، ترسیم دایره به مرکز مشخص و به قطر دهانهٔ طاق، تقسیم دایره، و ترسیم کمان‌ها طبق ضوابط تعیین شد. در تابع آخر از نرم‌افزار خواسته شده چهارضلعی محاط بر دایره و قطرهای آن را (مطابق تصویر ۱۳) انتخاب و محاسبه کند که آیا طبق اصول هندسی تثلیث کمان مجموع حاصل‌ضرب اضلاع مقابل برابر است با حاصل‌ضرب دو قطر، و درصورت مغایرت میزان خطا محاسبه شود. در اسکریپت روش دوم و سوم، به‌دلیل پیچیدگی‌های موجود در روش

ترسیم و انطباق طاق با قوانین تثلیث کمان، تابع دیگری (interrection) در سه مرحله (step) به توابع فوق اضافه شد. در مرحلهٔ اول (def step 1) از نرم‌افزار خواسته شده تا برخی کمان‌ها و خطوط ترسیمی در توابع پیشین را انتخاب کند و در دو مرحلهٔ آخر (def step 2 and def step 3) از نرم‌افزار خواسته شده چهارضلعی محاط بر دایره و قطرهای آن را (مطابق تصویر ۱۳) انتخاب کند و بعدازآن محاسبات را انجام دهد و میزان مغایرت را تعیین کند (نمودار ۱). در این سه شیوهٔ ترسیم، میزان خطا به‌ترتیب ۰، ۰.۶۵ و ۱.۶۶ درصد اعلام شده است. به‌عبارت‌دیگر، در روش اول، طاق مطابقت کامل با اصول هندسی تثلیث کمان را نشان داده است و در روش دوم و سوم به‌ترتیب مطابقت طاق با اصول هندسی تثلیث کمان دارای خطای نزدیک به نیم و یک‌ونیم درصد است.



نمودار ۱. اسکریپت ترسیم قوس با تشریح کاشانی
(در زبان برنامه‌نویسی پایتون) و بررسی میزان انطباق آن با تثلیث کمان

گنبدها به‌صورت نصف یا قطعه‌ای از کره‌ای توخالی‌اند. هم‌چنین می‌توانند به‌شکل مخروط ضلع‌دار (هرم) یا براساس شکلی که از چرخش یکی از انواع طاق‌ها حول محوری که از رأس آن گذشته و بر وسط قاعدهٔ آن عمود است حاصل شوند (کاشانی ۱۳۹۳: ۳۷). کاشانی در رساله‌اش به چهار نوع گنبد اشاره می‌کند: نیم‌کروی، بخشی از کره، مخروط چندوجهی، گنبدی که از چرخش قوسی پیرامون مرکزش به‌دست آمده باشد. هریک از قوس‌ها و طاق‌ها را می‌توان حول مرکزش چرخاند (ویلبر و دیگران ۱۳۷۴: ۲۱۷). ازاین‌رو، مطالعات فوق برای هر دو عنصر معماری طاق و گنبد قابل‌استناد و بررسی خواهد بود.

۷. فلسفهٔ فناوری ساخت طاق و گنبد معماری در عصر تیموری

فناوری پدیده‌ای است که همواره هم‌راه انسان بوده و او را در دست‌یابی به مقاصدش یاری کرده است (بابایی ۱۳۹۸: ۱). نظریه‌های علمی براساس قدرت تبیینی و شواهد تجربی ارزیابی می‌شوند و تأیید آن‌ها مستقل از خواسته و ارادهٔ انسان‌هاست، درحالی‌که در فناوری خواست و ارادهٔ انسان دخیل است (پایا و منصوری ۱۳۹۷: ۱۴۸). فناوری ساخت طاق و گنبد معماری ایران در دوران تیموری با پیدایش قوس‌های کمان‌ساز متنوع، بلند، و تیزه‌دار هم‌راه بود. غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضی‌دان عصر تیموری مقالهٔ چهارم از رسالهٔ *مفتاح الحساب* را به محاسبه، ترسیم، و اندازه‌گیری عناصر معماری اختصاص داده است. این رساله با مثلث و مسائل مربوط به آن آغاز می‌شود و در باب نهم از مقالهٔ چهارم با بررسی و ارزیابی برخی عناصر معماری پایان می‌پذیرد. کاشانی ذکر می‌کند: «پیشینیان صرفاً دربارهٔ اندازه‌گیری طاق و قوس صحبت کرده‌اند و به مسائل مرتبط با آن نپرداخته‌اند. اما من این کار را کرده و برای آن روشی علمی ارائه داده‌ام که در اندازه‌گیری ساختمان‌ها به‌کار می‌رود». به‌نظر می‌رسد رویکرد علمی غیاث‌الدین در تثلیث زاویه و رسالهٔ *وتر و جیب* در دست‌یابی به فناوری ساخت طاق و گنبد تیموری و قوس‌های مرتفع و تیزه‌دار مؤثر بوده است.

قوس‌های کمان‌ساز طاق و گنبد در فناوری ساخت این عناصر نقش عمده‌ای دارند. قوس در تعریف هندسی خط یا شکلی منحنی است و در اصطلاح معماری به باریکهٔ طاقی که بین دو دیوار قرار دارد اطلاق می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، به کمانی که طاق از لحاظ شکلی تابع آن است قوس گفته می‌شود. ازج[۹] واژه‌ای عربی است و غیاث‌الدین این واژه را برای طاق به‌کار برده است. قوس‌ها در دوران قبل از اسلام و حتی تا قرون اولیه بعد از اسلام در ایران غالباً مازه‌دارند، اما به‌تدریج پوشش‌های تیزه‌دار جای آن را گرفته است. در قوس مازه‌دار رأس هلالی‌شکل یا بخشی از بیضی است و رأس قوس تیزه‌دار تیز است و از تقاطع حداقل دو قوس منحنی ایجاد می‌شود. از عمده‌ترین دلایل جای‌گزینی قوس تیزه‌دار مرتفع‌تر نشان‌دادن بنا در مقایسه با قوس مازه‌دار است. ساخت طاق‌ها و گنبدهای بلند با تحمل نیروهای فشاری بیش‌تر گواه آشنایی ایرانیان با ضوابط ترسیم قوس از لحاظ ریاضی و هندسی است.

۸. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

تقسیم کره توسط دوایر عظیمه مطابق قضیهٔ منلائوس و رسم اشکال ساده بر سطح آن توسط بوزجانی در باب انتهایی رساله‌اش آغاز شده است. وی در این باب شرح داده است

که چگونه با ترسیم این دوایر بر سطح کره می‌توان کره را به قسمت‌های مساوی تقسیم کرد و درادامه این تقسیمات را به ترسیمات اشکال متفاوت بر سطح کره مرتبط ساخته است. در قرون بعد، خیام و پس‌ازآن کاشانی از ریاضی‌دانانی بودند که آثار به‌جامانده از آنان قابل‌تحلیل و تطبیق با مفاهیم هندسهٔ کاربردی مرتبط با معماری است که بوزجانی در رسالهٔ خود در تبیین آن اهتمام ورزیده بود. تضعیف مربع و تثلیث زاویه راه‌حل‌هایی‌اند که ابوالوفا در کتاب *اعمال هندسی* خود مطرح کرده است. موارد ذکرشده از مباحثی بوده‌اند که ذهن ریاضی‌دان‌ها را بسیار به‌خود مشغول کرده بودند و حاصل آن کشف مقاطع مخروطی بود که تأثیر به‌سزایی در جهش و پیشرفت بسیاری از علوم و معماری داشته است.

روش‌های ابوالوفا برای حل مسئلهٔ صنعت‌گران در شکست طاق‌ها ناکام ماند و فقط به صنعت‌گران نشان داد که چگونه می‌توانند مشکل را به‌روشی موجه حل کنند. برتری شاخص ابوالوفا در ایجاد رابطه میان نظریه و عمل است؛ اما دیدگاه خیام درمورد عرف هندسه با اتکا به نظریه‌اش به عمل نزدیک شد؛ او در تشریح مثلث خود کوشید تا روشی پیدا کند که در آن حتی‌المقدور از مقاطع مخروطی کم‌تر استفاده شود تا درک آن برای افراد غیرریاضی‌دان آسان‌تر باشد. خیام روشش را برای اهل تجربه و عمل ارائه کرد، اما درنهایت دریافت که اصحاب صنایع درصورتی‌که مایل باشند خود این کار را انجام دهند به مقدماتی از اصول و مفاهیم مقاطع مخروطی نیاز دارند و به همین دلیل روش واسط روش دوم خیام بود برای حل مسائل مطرح‌شده از جانب اصحاب صنایع. استفاده از مثلث خیام و شیوهٔ ترسیم آن به معادلهٔ درجهٔ سومی منجر شد که خیام با استفاده از مقاطع مخروطی به حل آن فائق آمد. نقوش ترسیمی که در آن‌ها از مثلث خیام استفاده می‌شود به اشکال دیگری منجر می‌شوند که در اشکال مستخرج توسط ریاضی‌دانان قرن نهم، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، بررسی شد. محاسبات هندسی این اشکال توسط کاشانی بسط یافت و درنهایت تکمیل شد.

کاشانی رسالهٔ *مفتاح‌الحساب* را با مثلث و مسائل مربوط به آن آغاز و در محاسبهٔ جیب یک درجه از مثلثی شبیه به مثلث خیام (مثلث قائم‌الزاویه ۵۷ و ۳۳ درجه) استفاده کرد، با این تفاوت که او هر جیب را معادل یک واحد در حساب شصت‌گانی محاسبه کرد. مثلث کاشانی برای محاسبهٔ جیب یک درجه در حساب شصت‌گانی برابر با مثلث قائم‌الزاویهٔ ۶۰ و ۳۰ بود. ثابت ابن‌قره و به‌دنبال آن ابوالوفا بوزجانی در تضعیف مربع و تثلیث زاویه از مثلث‌های قائم‌الزاویه با همین نسبت (نسبت اضلاع یک به دو) استفاده کرده‌اند. کاشانی این قوس‌ها را براساس تجربیات خود در ایستایی و رفتار سازه‌ای قوس‌ها، که تا قبل‌ازآن برخی از آن‌ها شکسته می‌شدند، طراحی و ترسیم کرده است. او قوسی را پیش‌نهاد داد که از نظر

ریاضی و معماری کاربردی است و قوس دوم را (دارای نیم درصد خطـا نسـبت بـه حالـت ایدئال اصول هندسی است) قوس حقیقی در معماری دانست و روش دیگری را بـرای خیـز بیش‌تر مطرح کرد که بر اصول هندسی استوار است. از نظر پژوهش‌گران، کاشانی بـه‌درسـتی به قواعد مثلثاتی ریاضیات در معماری توجه کرده است و این تمرین عملی و نظـری نبـوده است. او با علم به وجود میزان خطا که به‌معنای خروج از تثلیث کمان با خطایی نزدیـک بـه یک درصد (قابل‌اغمـاض در علـم آمـار) اسـت قـوس‌هـای مناسـبی را از نظـر معمـاری و ریاضیاتی پیش‌نهاد داده است و گواه آن قوس نوع اول با تقسیم دایره تحت زاویهٔ ۶۰ درجـه است که دارای خطای صفر درصد است.

پی‌نوشت‌ها

۱. تاریخ تولد کاشانی به‌طور دقیق در منابع نیامده است. ابوالقاسم قربانی در *کاشانی‌نامه* با اسـتناد بـه برخی قرائن تاریخ تولد کاشانی را درحدود ۷۹۰ ق می‌داند. وی تاریخ درگذشت غیـاث‌الـدین را نوزدهم رمضان ۸۳۲ ق ذکر کرده است.

۲. منلائوس اسکندرانی، دانشمند یونان باستان، قضیهٔ اول مقالهٔ سوم از کتاب *الاشکال‌الکریـة* وی بـه قضیهٔ منلائوس معروف است که به چهار کمـان متقـاطع از دایـره‌هـای عظیمـه روی سـطح کـره بیان می‌شود.

۳. منلائوس در مقالهٔ سوم کتاب خود قضیه‌ای را بیان و اثبات می‌کنـد کـه تـا پـیش از قضـیهٔ ابـداع سینوس‌ها در قرن چهارم هجری، تمام محاسبات مربوط به کمان‌های روی کـره بـا اسـتفاده از آن انجام می‌شد. این قضیه امروز به‌نام خود منلائوس معروف است و در دورهٔ اسلامی (قـرن چهـارم و بعد از آن) شکل‌القطاع نامیده شد. این قضیه در *مجسطی* بطلمیوس در هر دو حالـت مسـطح و کروی ذکر شده است.

۴. از نظر دانشمندان دورهٔ اسلامی جیب از جنس طول بود؛ اما سینوس امـروزه بـه‌صـورت نسـبت تعریف می‌شود. جیب کمانی معادل حاصل‌ضرب شعاع دایرهٔ مفروض و سینوس آن کمان اسـت. در گذشته برای کسینوس کمان یا زاویهٔ لفظ جیب تمـام یعنـی جیـب مـتمم آن کمـان یـا زاویـه استعمال می‌شد.

۵. یونانی‌ها به‌جای کلیهٔ توابع مثلثاتی کنونی فقط یـک تـابع بـه‌کـار مـی‌بردنـد کـه آن را تـابع وتـر می‌نامیدند؛ علامت اختصاری آن crd است و تعریف این تابع این است که اگر هر عدد مفروضـی مانند X را مقدار درجهٔ زاویهٔ مرکزی قرار بدهیم، به‌طوری‌که شعاع دایرهٔ مربوطه مسـاوی شصـت باشد، وتر آن زاویهٔ مرکزی crdX می‌شود.

۶. از دید پژوهش‌گران، این رقم برمبنای اعداد شصت‌گانی نوشته شده و هر واحد برابر شصت است.

۷. اولین نوع برای دهانه‌های کم‌تر از پنج ذراع، نوع دوم برای پنج و ده و حداکثر پانزده ذراع، و نـوع سوم برای دهانه‌های بزرگ‌تر از ده باع بسیار مناسب است.

۸. دو بخش از یک استوانه یا حلقه یا شکل طبل با قطری کوچک‌تر یـا مسـاوی دهانـه بـر روی دو تکیه‌گاه، دو بخش دیگر از یک استوانه یا حلقه یا شکل طبل با قطری بزرگ‌تر از اولـی بـا ارتفـاع برابر بر روی رأس دو بخش اول، قطعه‌ای به‌شکل لوزی که قوس‌ها را به هم متصل مـی‌کنـد. در روش چهارم قوس تنها دو قطعهٔ استوانه‌ای هم‌راه با سنگ بـالای طـاق تشـکیل شـده و در روش پنجم تنها شامل دو بخش استوانه‌ای است.

۹. فرق طاق و ازج در نسبت عرض و یا همان عمق به دهانهٔ آن‌هاست. عرض طاق بیش‌تر از دهانـهٔ آن نیست، ولی در ازج ممکن است بیش‌تر و گاهی به‌اندازهٔ عرض آن باشد.

کتاب‌نامه

امینی، حسن (۱۳۹۲)، «تعبیر کروی هندسهٔ مسطحه در بخش هندسی *الاشکال الکریهٔ* منلائـوس»، *تـاریخ علم*، دورهٔ ۱۱، ش ۱، ش پیاپی ۱۴.

اوزدورال، آلپای (۱۳۸۰)، «*عمر خیام و معماری*»، ترجمهٔ ناصر کنعانی، *فرهنگ*، ش ۳۹ و ۴۰.

بابایی، سعیده (۱۳۹۸)، «فلسفهٔ تکنولوژی بورگمان: مروری انتقادی»، *فلسفهٔ علم*، س ۹، ش ۲.

عمر خیام (۱۳۸۸)، رسالهٔ فی شرح ما أشکل من مصادرات کتـاب اصـول اقلیـدس، *کتـاب مـاه علـوم و فنون*، ش ۱۱۸.

پایا، علی و علی‌رضا منصوری (۱۳۹۷)، «علم و تکنولوژی: تفاوت‌ها، تعامل‌هـا، و تبعـات آن‌هـا»، *فلسـفهٔ علم*، س ۸ ش ۲.

خیری، علی (۱۳۸۹)، «قوس معماری ایرانی اسلامی در *مفتاح‌الحسـاب* غیـاث‌الـدین جمشـید کاشـانی»، *کتاب ماه علوم و فنون*، ش ۱۲۹.

دوست‌قرین، فاطمه (۱۳۸۸)، «رسالهٔ میرزا ابوتراب نطنزی در تثلیث زاویـه»، *تـاریخ علـم*، دورهٔ ۷، ش ۱، ش پیاپی ۸

سمپلونیوس، ایوونه دولد (۱۳۸۴)، «روش کاشانی برای محاسبهٔ قوس‌هـا»، ترجمـهٔ علـی‌رضـا اشـرفی و محمدرضا احمدی، *آینهٔ میراث* ویژهٔ تاریخ علم، ش ۲۸.

سوادی، فاطمه (۱۳۸۷)، «رساله‌ای فارسی دربارهٔ محاسبهٔ جیب یک درجه»، *تاریخ علم*، دورهٔ ۶، ش ۱.

طاهری، جعفر (۱۳۹۰)، «نقد بر تحقیق و تصحیح *ترجمه کتاب النجـاره* بوزجـانی»، *کتـاب مـاه علـوم و فنون*، ش ۵۳.

طاهری، جعفر و هادی ندیمی (۱۳۹۱)، «بازخوانی میراث ابوالوفا بوزجانی در صنعات معمـاری»، *تـاریخ علم*، دورهٔ ۱۰، ش ۲، ش پیاپی ۱۳.

طاهری، جعفر و عبدالحمید نورتقانی (۱۳۹۰)، «دانش ریاضیات معماری در آثار کاشانی»، *کتاب ماه علوم و فنون*، ش ۵۲.

قربانی، ابوالقاسم (۱۳۶۸)، *کاشانی‌نامه: احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی*، تهران: نشر دانشگاهی.

کاشانی، غیاث‌الدین جمشید (۱۳۸۳)، *رسالهٔ طاق و ازج*، ترجمهٔ سیدعلی‌رضا جذبی، تهران: سروش.

کندی، ای. اس. (۱۳۳۲)، «نکته‌هایی دربارهٔ هیأت اسلامی»، *علوم اجتماعی: فرهنگ ایران زمین*، ش ۱.

مهدوی، یونس (۱۳۹۰)، «قضیهٔ منلائوس در کتاب کشف القناع»، *کتاب ماه علوم و فنون*، ش ۱۳۸.

نجیب اغلو، گل‌رو (۱۳۹۷)، *هندسه و تزئین در معماری اسلامی (طومار توپقاپی)*، ترجمهٔ مهرداد قیومی بیدهندی، تهران: روزنه‌کار.

ویلبر، دونالد و دیگران (۱۳۷۴)، *معماری تیموری در ایران و توران*، ترجمهٔ کرامت‌الله افسر و محمد یوسف کیانی، تهران: سازمان میراث فرهنگی کشور.

یوشکه‌ویچ، آدولف و بوریس روزنفلد (۱۳۵۸)، *غیاث‌الدین جمشید کاشانی*، ترجمهٔ پرویز شهریاری، ماهنامهٔ علمی و فرهنگی *هدهد*، س ۱، ش ۲.

Ozden, Denise (2015), *Theory and Practice Of Geometry in Medieval Architecture in The Middle East (10th-14th Centuries)*, A Thesis Submitted to The Graduate School Of Social Sciences of Middle East Technical University.

Ozdural, Alpay (1998), "A Mathematical Sonata for Architecture: Omar Khayyam and the Friday Mosque of Isfahan", *Technology and Culture*, vol. 39, no. 4.

Ozdural, Alpay, (2000), "Mathematics and Arts: Connections Between Theory and Practice in the Medieval Islamic World", *Historia Mathematica*, vol. 27, no. 2.

Rutten, David (2011), Python for Rhinoceros 5, Rhinocervs, Revision 3, <http://designalyze.com/sites/default/files/tutorial_files/RhinoPythonPrimerRev3.pdf,>