فلسفهٔ علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی ـ پژوهشی، سال هشتم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۷، ۱-۲۶

ناسازگاری پیوسته‌گرایی هندسی و اتم‌گرایی کلام در آرای فخر رازی

بنفشه افتخاری[*]

چکیده

اتم‌گرایی کلام، که هم معتزله و هم اشاعره از آن دفاع کرده‌اند، شامل اتم‌گرایی هندسی نیز می‌شود. اتم‌گرایی هندسی گونه‌ای از اتم‌گرایی است که خطوط و اَشکال هندسی را متشکل از تقسیم‌ناپذیرها می‌داند. به‌بیان‌دیگر، در این نگاه، خط از گردهم‌آمدن نقاط به‌وجود می‌آید. این دیدگاه با تعاریف اولیهٔ کتاب *اصول* اقلیدس و درنهایت با هندسهٔ کلاسیک ناسازگار است. فخر رازی که در دهه‌های آخر عمر خود مدافع اتم‌گرایی بوده است، از این ناسازگاری آگاه بوده و درخلال بحث از برهان‌های مرتبط با اتم‌گرایی، برای رفع آن تلاش کرده است. باوجوداین‌که تلاش وی در بنیان‌نهادن هندسه‌ای سازگار با اتم‌گرایی به‌ثمر نمی‌نشیند، استدلال‌های او حاوی نکات ظریف و مهمی است که به‌لحاظ تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات اهمیت دارند. در این مقاله چند برهان از فخر رازی در کتاب *المطالب العالیه* بررسی و تحلیل و به زبان ریاضیاتِ نوین تبیین می‌شود. سعی می‌کنیم با تحلیل پس‌زمینهٔ نظری این براهین به چهارچوبی دست یابیم برای روشن‌ساختن اهمیت این براهین در تاریخ ریاضیات. در این بین نشان داده می‌شود که چگونه رازی ساختار متفاوتی از ساختار هندسهٔ کلاسیک روزگار خود را می‌آزماید، و هم‌چنین پیشنهاد می‌شود تا ادلهٔ او در تاریخ نظریهٔ «بی‌نهایت کوچک‌ها» در حد یک امکان در نظر گرفته شود.

کلیدواژه‌ها: اتم‌گرایی کلام، اتم‌گرایی هندسی، فخر رازی، جوهر فرد، پیوسته‌گرایی هندسی.

۱. مقدمه

بحث اختلاف بین دو دیدگاه دربارهٔ خط و این‌که آیا متشکل از نقاط است یا نه به دورهٔ یونان باستان بازمی‌گردد. فیثاغوریان از اولین کسانی بودند که از تشکل خط از نقاط دفاع

* دکترای تاریخ و فلسفهٔ علم، دانشگاه لیون (ژان مولن)، b.eftekhari@gmail.com
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۱۸، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۲/۱۴

کردند و هم‌چنین به وجود مقادیر ناصحیح و گنگ در اَشکال هندسی پی بردند. این دیدگاه از همان زمان، در چگونگی نمایش مقادیر ناصحیح و گنگ دشواری‌های جدی داشت؛ ازاین‌رو از هندسهٔ یونانی طرد شد. اتم‌گرایانی چون دموکریتوس، بااین‌که به وجود اتم در طبیعت اعتقاد داشتند، در هندسه از پیوسته‌گرایی[۱] یا پیوسته بودنِ کمیات و درنتیجه از تشکیل‌نشدن خط از نقاط دفاع کرده‌اند (هیث ۱۳۸۱: ۱۱۶). پیوسته‌گرایی کمیات یا اندازه‌پذیرها را تا بی‌نهایت تقسیم‌پذیر می‌داند. به‌طور خاص، در پیوسته‌گرایی هندسی[۲]، نقطه جزئی از خط نیست، بلکه نهایت آن است و دیگر آن‌که نقطه بُعد ندارد تا بتواند سازندهٔ خط باشد. اگرچه این دیدگاه قبل از ارسطو پیروانی داشته است و ریاضی‌دانانی بدون توجه به اصول و نام آن درعمل در حل مسائل از آن پیروی می‌کردند، کسی که آن را در قالب گزاره‌های مشخص صورت‌بندی کرد ارسطو بود (همان: ۱۸۵–۱۸۶). ارسطو، در کتاب ششم *فیزیک*، نقطه، خط، و سطح را پیوسته می‌داند و استدلال می‌آورد که هیچ کمیت پیوسته‌ای (continuum) نمی‌تواند متشکل از تقسیم‌ناپذیرها باشد (Aristotle 2005: 138-139; Bekker: 231b6). مفاهیمی چون نقطه، خط، سطح، دایره، و حجم که ارسطو زیربنای نظری‌شان را توضیح داده بود تقریباً به همان شکل در کتاب *اصول* اقلیدس با عنوان تعاریف آورده شده است (Euclid 1908: vol. I, 153-154)؛ کتابی که به‌عنوان مرجع کلاسیک علم هندسه شناخته شده است.[۳]

بااین‌حال، اتم هندسی هم‌چنان جایگاه خود را در مباحث فلسفهٔ ریاضی حفظ کرد؛ طوری‌که، پس از ارسطو، اپیکوروس و رواقیون هم‌چنان این رشته را ادامه دادند. اتم‌گراهای پساارسطویی درپی پاسخ به شبهات ارسطو بودند (Berryman 2013). این مباحث به دنیای اسلام نیز راه یافت. از همان نخستین روزهایی که مباحث علمی در جهان اسلام پا می‌گرفت، بحث معادل بودن اتم و نقطه نیز مطرح شد.[۴] با همهٔ اختلاف دیدگاه‌ها، تقریباً از قرن سوم هجری به‌بعد، در متون مربوطه، نقطه و اتم معادل هم‌اند؛ به‌نحوی‌که بخش بیش‌تر برهان‌های اثبات‌کننده یا ابطال‌کنندهٔ اتم هندسی‌اند. در این مقاله که به‌طور خاص به کتب فخر رازی می‌پردازیم، اتم و نقطه کاملاً معادل هم فرض شده‌اند؛ گواین‌که برخی اوقات نیز عبارت «جزءلایتجزا» یا «جوهر» راجع‌به اتم برای نقاط هم به‌کار رفته است.[۵]

نکته‌ای که قبل از بررسی آرای فخر رازی نباید از نظر دور داشت این است که حکم‌دادن دربارهٔ آرای او، که قلمی نقاد و شکاک داشته است، بسیار دشوار است. فخر رازی بیش‌تر آرای دیگران را تحلیل و بررسی کرده است تا به‌صراحت نظر خود را بیان

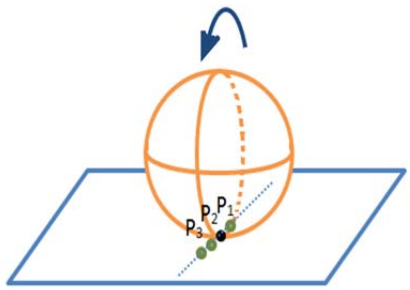
کرده باشد. به‌علاوه، وی در برهه‌های مختلف در مسائل مختلف تغییر نظر داده است؛ کمااین‌که درخصوص اتم‌گرایی نیز به‌دفعات چنین کرده است: در کتب اولیه‌اش، اتم به‌وضوح رد شده است، حال‌آن‌که در کتبی دیگر از آن دفاع شده است. ازآن‌جاکه فخر رازی در سال‌های آخر عمر بیش‌تر مدافع وجود اتم بود، این مقاله نیز برمبنای کتب متأخر او و عمدتاً براساس *المطالب العالیة* است.

۲. چگونگی تشکیل خط از اتم‌ها/ نقطه‌ها

اتم‌گرایان برای اثبات نظریهٔ خود به چندین برهان هندسی متوسل می‌شوند. شایان ذکر است که هر دو دیدگاه رقیب، چه اتم‌گرایی و چه پیوسته‌گرایی، برسر تقسیم‌ناپذیریِ نقطه اجماع داشتند، حال‌آن‌که مسئلهٔ اصلی این بود که آیا این نقاطِ تقسیم‌ناپذیر به‌وجود آورندهٔ خط‌اند یا خیر. اتم‌گراها در برهان‌هایشان از مفهوم حرکت استفاده می‌کنند: از جابه‌جایی نقطهٔ درحال حرکت خط به‌وجود می‌آید. این برهان‌ها تقریباً در اغلب کتب فلسفی ـ کلامی که دربارهٔ اتم‌گرایی بحث می‌کند تکرار شده‌اند. فخر رازی نیز در بیش‌تر کتب خود آن‌ها را تکرار و تحلیل کرده است.[۶] اگرچه این براهین در اَشکال مختلف طرح شده‌اند، می‌توان آن‌ها را در قالب دو برهان کلی بیان کرد: الف) برهان کره و صفحه؛ ب) برهان دو خط.

۱.۲ برهان کره و صفحه

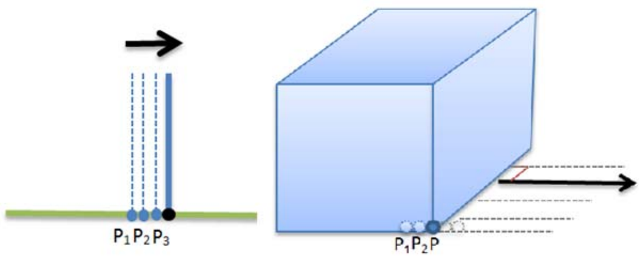
در این برهان کره‌ای برروی صفحه‌ای تخت فرض گرفته می‌شود. براساس استدلال هندسی، تماس کره و سطح تنها یک نقطه است. حال فرض کنیم این کره شروع به غلتیدن روی صفحه کند. با غلت‌خوردن کره، نقطهٔ تماس جابه‌جا می‌شود و درصورتی‌که کره در یک راستا بغلتد، نقاط تماسِ متوالی تشکیل خط می‌دهند (شکل ۱). این خط در بازهٔ زمانی‌ای شکل می‌گیرد که خودْ از به‌هم‌پیوستن لحظات تقسیم‌ناپذیر تشکیل شده است؛ به‌گونه‌ای‌که هر نقطه در یک لحظهٔ تقسیم‌ناپذیر طی شده است (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۴۷–۵۲). البته این برهان چندان محکم نمی‌نماید، زیرا مفهوم دایره در مدل اتم‌گرایی هندسی دچار اشکال است. متعاقب آن، در این مدل، ما کرهٔ کاملی که محل تماسش با صفحه تنها یک نقطه باشد نخواهیم داشت. فخر رازی در کتاب‌های خود این نکته را گوش‌زد کرده است.[۷]



شکل ۱. غلت‌خوردن کره روی صفحهٔ مسطح

۲.۲ برهان دو خط

در این برهان دو خط عمود بر هم در نظر گرفته می‌شود که یکی ثابت و دیگری متحرک است و در یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند. مادامی‌که این خط حرکت کند، محل برخورد خطی را شکل می‌دهد که بر خط دیگر منطبق است (شکل ۲). این حرکت نیز در بازه‌ای از زمانِ متشکل از لحظات تقسیم‌ناپذیر انجام می‌پذیرد (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۵۲). ازآن‌جاکه این برهانَ بر مفهوم دایره تکیه ندارد، ازنظر فخر رازی برهان بهتری است (رازی ۲۰۱۷: ۲۳۶؛ رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۵۲–۵۳).



شکل ۲. دو خط عمود بر هم که یکی بر دیگری حرکت می‌کند

بر این اساس خط حاصل ردیف‌شدن نقاط تجزیه‌ناپذیر براثر حرکت است. در استدلال پیوسته‌گراها، براساس استدلال ارسطو، نقاط بُعد ندارند؛ چراکه هر بُعدی که برایشان تصور شود، یک خط خواهد بود. درواقع نقطه فقط نهایتِ یک خط است. اگرچه اتم‌گرایان متکلم نظر صریحی دراین‌باره ندارند، ازآن‌جاکه نقاط امتداد طول را تشکیل می‌دهند، می‌توان این‌گونه تفسیر کرد که نقاط درواقع پاره‌خطک‌های تجزیه‌ناپذیری‌اند که از به‌هم‌پیوستن آن‌ها خط به‌وجود می‌آید. درمیان براهین مختلف، چه نزد اتم‌گراها و چه نزد پیوسته‌گراها،

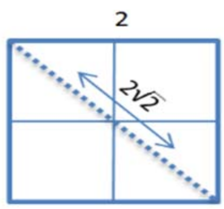
عباراتی هستند که وقتی از دو جزء بحث می‌شود دو اتـم دارای بُعـد در نظـر گرفتـه شـده است.[۸] درصورتی‌که اگر اتم‌ها یا نقاط بُعد نداشته باشند، از هم‌پوشانی آن‌ها خط بـه‌وجـود نمی‌آید.[۹] فخر رازی این نکته را می‌دانسته و از بی‌بُعدی اتم‌هـا جانـب‌داری نکـرده اسـت؛ چنان‌که برخی اتم‌گرایان اولیه چنین کردند.[۱۰]

۳. ناسازگاری اتم‌گرایی هندسی و هندسهٔ اقلیدسی

بدیهی است که اگر خط از پاره‌خطک‌های تجزیـه‌ناپـذیر تشـکیل شـده باشـد، بـا هندسـهٔ اقلیدسی ناسازگار می‌افتد. پیوسته‌گراها از این ناسازگاری برای رد امکان وجود اتم هندسی استفاده کرده‌اند. برهان‌های بسیاری هست که دال بـر مقـادیری‌انـد حـاوی معـادل عـددیِ ناصحیح یا گنگ.

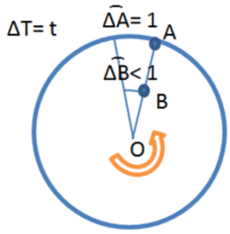
فخر رازی این برهان‌ها را در کتاب *المطالب العالیه* و *إثبات جزء الذی لا یتجزا* به‌عنوان براهین نـافی جـوهر فـرد در دو بخـش «براهینـی کـه بـر مثلثـات و مربعـات مبتنـی‌انـد» (رازی ۱۹۸۷: ۱۴۷–۱۵۷؛ رازی ۲۰۱۷: ۲۷۳–۲۷۹) و بحـث «کُنـدی و تنـدی سـرعت» (رازی ۱۹۸۷: ۹۹–۱۰۷؛ رازی ۲۰۱۷: ۲۵۸–۲۶۲) آورده است.

برای مثال یکی از این برهان‌ها این است که مربعی که هر ضلع آن دو اتم باشد قطـر آن $2\sqrt{2}$ است. پس اتم‌ها تقسیم می‌شوند (شکل ۳).



شکل ۳. قطر مربع

برهان‌های مبتنی‌بر کندی و تندی سرعت سیسـتمی را مفـروض مـی‌گیرنـد، شـامل دو متحرک که هردو در زمان یک‌سان مسافت‌های متفاوتی طی می‌کنند. برای مثال، بااین‌که دو نقطهٔ مفروض روی آسیاب سنگیِ حین چـرخش در زمـان یـک‌سـان شـروع بـه حرکـت می‌کنند، نقطه‌ای که به مرکز نزدیک‌تر است مسافت کم‌تری طی می‌کنـد. درنتیجـه ممکـن است که مسافت نقطهٔ نزدیک‌تر کسری از مسافت نقطهٔ دورتر باشد.



شکل ۴. گردش آسیاب سنگی

فخر رازی با آگاهی از این ناسازگاری بیان می‌کند که این براهین بسیار محکم‌اند و غیرقابل رد (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۱۵۵؛ رازی ۲۰۱۷: ۲۸۲) و کسی که اتم‌گرایی را باور دارد باید هندسه را به‌ریش‌خند بگیرد. «بدان که هندسه از اول تا آخر جوهر فرد را ابطال می‌کند... و هرکس که حجت او بر وجود جوهر فرد تمام می‌شود بر او واجب است که علم هندسه را به‌ریش‌خند بگیرد» (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۱۶۶).[۱۱]

باور به اتم‌گرایی کلام، در مقام نظریه‌ای که روی بنیان متافیزیکی کلام استوار است، می‌تواند آبشخور مذهبی داشته باشد. به‌بیان‌دیگر می‌توان چنین گفت که اتم‌گرایی کلام نظریه‌ای فیزیکی است که مقوم مبانی متافیزیکی موردِدفاع متکلمان است. به‌عبارت‌دیگر فیزیکی است که با متافیزیک مدنظر متکلمان سازگار است (معصومی همدانی ۱۳۶۵؛ افتخاری ۱۳۸۶: ۳۵–۳۲). اما چنین برداشتی درمورد فخر رازی، درمقام متکلمی که همواره استقلال نظر داشته است، چندان درست نمی‌نماید. وی با پشتوانهٔ قوی حاصل از پدر و اساتید اشعری خویش در کتب نخستین خود به‌صراحت اتم‌گرایی را رد و براساس دلایل معرفت‌شناختی و ادلهٔ قوی‌تر، در اواخر عمر خود، از اتم‌گرایی دفاع می‌کند. درواقع ریش‌خند او به هندسه مبانی قوی فلسفی و معرفت‌شناختی دارد.[۱۲]

فخر رازی در *المطالب العالیة* چنین می‌گوید که گرچه هندسه از عالی‌ترین و قطعی‌ترین علوم بشری است، حتی این علم نیز از درک بسیاری از مسائل عاجز است و همین را دلیلی بر نقصان دانش بشری می‌داند (رازی ۱۹۸۷: ج ۱، ۴۶).[۱۳] او به‌طور دقیق‌تر در جلد ششم که مفصل به مقولهٔ اتم‌گرایی و هندسه پرداخته است، در ادامهٔ برهان‌های هندسی نافی اتم‌گرایی، بخشی را به اعتبار علم هندسه اختصاص می‌دهد و تلاش می‌کند روشن کند که چرا این علم چندان معتبر و قطعی نیست. برای مثال، در مقالهٔ اول از این مجلد فصلی مبسوط را به ضعف براهین هندسه دال بر وجود دایره و کرهٔ مطلق اختصاص داده است؛ ازجمله یکی از براهین هندسی را که مفروض می‌دارد یک سر خطِ متناهی را ثابت نگاه

داریم و سر دیگر آن را دَوران دهیم دچار اشکال می‌داند؛ چراکه مهندسان هیچ دلیلی بر امکان ابقای ثبات یک نقطه در تمامی زمان‌ها به‌دست نمی‌دهند. نیز برهان دیگری را که دایره را سطح مقطع کره فرض می‌گیرد مستلزم دور می‌داند؛ زیرا خودِ کُره از دَوران دایره تعریف می‌شود (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۱۳۹–۱۴۶).

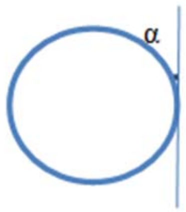
بدین ترتیب فخر رازی، با به‌پرسش‌کشیدن روش استدلالی براهین هندسی، این علم را قاطع و بدون خطا نمی‌پندارد. او ازآن‌جاکه برخی براهین به‌گونه‌ای مفروض می‌شوند که ممکن است در واقعیت قابل‌تحقق نباشند (مانند برهان دایره) هندسه را دانشی وهمی معرفی می‌کند. این اندیشمند مسلمان هندسه را برای بحث دربارهٔ موضوع اتم‌ها فاقد شایستگی لازم می‌داند، زیرا اتم‌ها ازنظر او واقعی، و هندسه وهمی است؛ مضاف‌براین‌که اتم‌ها را ورای اِشکال می‌داند که توصیفشان در قالب علم هندسه نمی‌گنجد (همان: ج ۶، ۱۴۶).[۱۴] این مسئله مؤید نوعی پذیرش شکاکیت درباب اتم‌هاست و می‌بینیم که فخر رازی برخلاف دیگر اتم‌گرایان اولیه که درخصوص شکل اتم‌ها بحث کرده‌اند (Pines 1997: 8-19) از ورود به این بحث خودداری و تنها به بحث دربارهٔ امکان وجود آن‌ها بسنده می‌کند.

۴. تلاش‌های هندسی فخر رازی برای توجیه اتم‌گرایی

تلاش فخر رازی با طعنه به هندسه پایان نمی‌یابد. او در مجموعه‌برهان‌های اثبات‌کنندهٔ جوهر فرد، در جلد ششم کتاب *المطالب العالیه*، فصلی را به براهین متفرقه‌ای اختصاص داده است که وجود اتم را اثبات می‌کنند.[۱۵] در این برهان‌ها فخر رازی کوشش کرده است که لابه‌لای مسائل هندسی برهانی بیابد که بر وجود مقداری دلالت کند که کوچک‌تر از آن امکان‌پذیر نباشد. اگرچه در این برهان‌ها اشتباه خلط دو مبحث به‌چشم می‌خورد، بررسی آن‌ها دریچهٔ تازه‌ای از رویکرد فخر رازی به هندسه به روی ما می‌گشاید.

در یکی از برهان‌ها فخر رازی ادعا می‌کند، اگر جوهر فرد را نپذیریم، باید قبول کنیم که مقدار/ اندازهٔ کوچک‌تری که در حال رشد است و بزرگ‌تر می‌شود هرگز به مقدار بزرگ‌تری که در حال کوچک‌شدن است نمی‌رسد[۱۶] (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۷۶). این برهان در بدو امر متناقض‌نماهای زنون را به‌ذهن می‌آورد، اما در ادامه می‌بینیم که فخر رازی برای اثبات این قضیه به زاویه‌ای استناد می‌کند که به زاویهٔ شاخکی (cornicular-angle or horn-angle) مشهور است: زاویهٔ بین یک خط مماس و یک دایره که به‌عنوان کوچک‌ترین زاویهٔ ممکن مطرح می‌شود (شکل ۵). این مسئله که در کتاب اقلیدس مطرح شده است

(Euclid 1908: vol. II, 37-43) از دیرباز در دوران یونـان باسـتان (هیـث ۱۳۸۱: ۱۱۴) و در دورهٔ اسلامی محل بحث بین متکلمان و هندسه‌دانان بوده است (Rashed 2005).

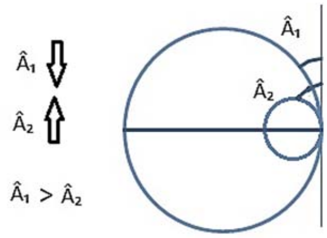


شکل ۵. زاویهٔ شاخکی

روشن است که زاویهٔ مذکور منطبق با تعریفی نیست که ما از زاویه مـی‌شناسـیم؛ زیـرا قوس دایره خط خمیده و مماسْ خط راست است. ازنظر ما زاویهٔ بین دایره و خط ممـاس بر آن صفر است. اما گویی هندسه‌دانان حتی در زمان خودِ اقلیدس نیز در این‌که این تلاقی زاویه باشد یا خیر به وفاقی نرسـیده و برخـی آن را کوچـک‌تـرین زاویـهٔ ممکـن معرفـی کرده‌اند.[۱۷] فخر رازی بر این‌که این زاویه کوچک‌ترین زاویهٔ حـادهٔ ممکـن باشـد و متعاقباً زاویهٔ بین قوس دایره و قطر بزرگ‌ترین زاویهٔ حادهٔ ممکن باشد به اقلیدس اسـتناد کـرده و مدعی شده است که چنین مدعایی تنها درصورتی می‌تواند درست باشد که ما کوچک‌ترین دایرهٔ ممکن را داشته باشیم، طوری‌که نتوان دایره‌ای کوچک‌تر از آن رسم کرد:

> اگر روی قطر دایره دایره‌ای کوچک‌تر، مماس بر آن، از نقطه که خط عمود قرار دارد در نظر بگیریم، زاویه‌ای که از خط عمود تا دایرهٔ کوچک‌تر ایجاد می‌شـود از زاویـهٔ اولیـه [دایرهٔ بزرگ‌تر] بزرگ‌تر و زاویه‌ای که در داخل دایره [کوچک‌تر] قرار دارد کوچک‌تـر است. وقتی این ثابت شود، پـس مـی‌گـوییم: هرچـه دایـره کوچـک‌تـر باشـد، زاویـهٔ خارجی‌اش بزرگ‌تر می‌شود و [زاویهٔ] داخلـی‌اش کوچـک‌تـر. پـس اگـر مقـادیر تـا بی‌نهایت بخش‌پذیر باشد، می‌توان بی‌نهایت دایـره ترسـیم کـرد کـه هرکـدام از قبلـی کوچک‌تر باشد. هم‌چنین ایجاب می‌کند که زوایای خارجی تا بی‌نهایـت زیـاد شـود و زاویهٔ داخلی نیز تا بی‌نهایت کوچک شود. پس آن [زاویهٔ] خارجی مثـل ایـن [زاویـهٔ] داخلی نخواهد بود. چون آن [زاویهٔ] خارجی چگونه آن‌طور بوده است که کوچک‌ترین زاویهٔ ممکن مستقیم‌الخط باشد. و اگر این [زاویهٔ] داخلی این‌طور باشد، چگونه ممکن است که از همهٔ زوایای حادهٔ مستقیم‌الخط بزرگ‌تر باشد. پس ثابت می‌شود که آن‌چـه محال بودنش را لازم دانستیم لازم باشد (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۷۶).

او استدلال می‌کند که اگر درون دایره و در محل تماس دایره و خط عمود یک دایرهٔ کوچک‌تر ترسیم کنیم (شکل ۶)، زاویهٔ شاخکی دایرهٔ بزرگ‌تر و زاویهٔ داخلی کوچک‌تری می‌سازد.



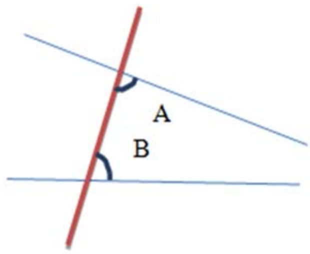
شکل ۶. دو دایرهٔ نامساویِ داخل هم؛ بزرگ‌تر کوچک‌شونده و کوچک‌تر بزرگ‌شونده

در این‌جا می‌بینیم که زاویهٔ خارجی دایرهٔ جدید ($\hat{A}_2$) از ($\hat{A}_1$) بزرگ‌تر شده است. به‌بیان بهتر، هرچه این دایره کوچک‌تر شود، زاویهٔ خارجی آن بزرگ‌تر می‌شود؛ پس نمی‌توان زاویهٔ شاخکی‌ای داشت به‌عنوان کوچک‌ترین زاویهٔ حادهٔ ممکن، مگراین‌که دایره‌ای باشد که نتوان کوچک‌تر از آن رسم کرد.[۱۸]

در برهانی دیگر، فخر رازی استدلال می‌کند که اگر تشکیل خط از اجزای تجزیه‌ناپذیر پذیرفته نشود، هندسه باید اصل موضوع خودش را نقض کند. شرح برهان به‌صورت زیر است:

> همانا اقلیدس در مصادرهٔ مقالهٔ اول گفته است: "همانا هر دو خط مستقیمی که خطی بر آن‌دو قرار دارد، اگر دو زاویهٔ آن که در یک جهت قرار دارند، از دو قائمه کم‌تر باشد، هم‌دیگر را در یک جهت قطع می‌کنند". این حکم را اقلیدس داده است و هندسه‌دانان بر آن اجماع دارند. و ما می‌گوییم که اگر مقادیر به‌طور نامتناهی قابل‌قسمت باشند، این حکم صادق نخواهد بود؛ چراکه این دو خط مادام‌که درازتر می‌شوند، به‌هم نزدیک‌تر می‌گردند. ولیکن این نزدیک شدن موجب نمی‌شود که به‌هم برسند؛ اگر به‌شکل نامتناهی قابل‌قسمت باشند (همان: ج ۶، ۷۷).

فخر رازی به اصل‌موضوع کتاب *اصول* اقلیدس اشاره می‌کند که می‌گوید، اگر دو خط به‌هم نزدیک شوند، باید هم‌دیگر را قطع کنند (Euclid 1908: vol. I, 155). به‌عبارت‌دیگر اگر طبق شکل ۷ مجموع دو زاویهٔ A و B کم‌تر از ۱۸۰ درجه باشد، دو خط d_1 و d_2 هم‌دیگر را قطع خواهند کرد (شکل ۷).

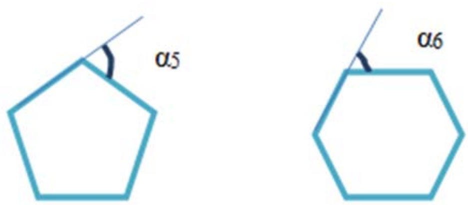


شکل ۷. اصل پنجم اصول اقلیدس

فخر رازی در این‌جا مدعی شده است که اگر، درکل، خط به‌شکل نامتناهی بخش‌پذیر باشد، این دو خط ممکن است به‌هم نرسند و نمونه‌هایی ازاین‌دست را می‌آورد:

۱. «در کتاب *مخروطات* آپولونیوس خطوطی معرفی می‌شوند که تا ابد به‌هم نزدیک می‌شوند، ولی هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند».[۱۹] احتمالاً منظور فخر رازی شاخه‌های مقاطع مخروطی و خط مجانب آن‌ها بوده است.

۲. هرچه تعداد اضلاع یک چندضلعی منتظم بیش‌تر شود، زاویهٔ خارجیِ کوچک‌تر و به ضلع نزدیک‌تر می‌شود؛ اما حتی اگر افزایش تعداد اضلاع تا بی‌نهایت ادامه یابد، هرگز این زاویه صفر نمی‌شود[۲۰] (شکل ۸) (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۷۸–۷۹).

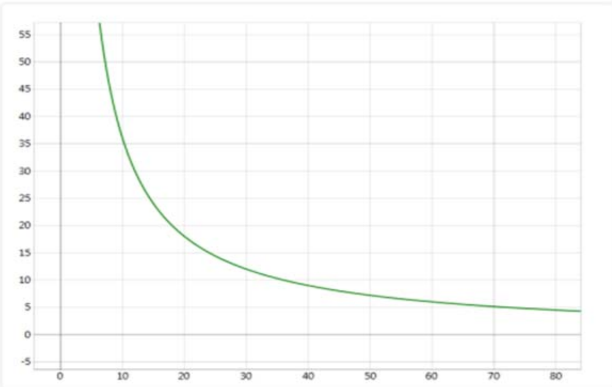


شکل ۸. کوچک شدن زاویهٔ خارجی چندضلعی‌های منتظم، با افزایش اضلاع

زاویهٔ خارجی چندضلعی منتظم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

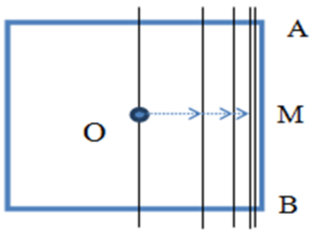
(رابطهٔ ۱)
$$\alpha = \frac{360}{n}$$

وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، α به‌سمت صفر میل می‌کند، ولی صفر نمی‌شود (شکل ۹).



شکل ۹. بخشی از نمودار f(x)= 360/x

۱. مربعی را فرض می‌کنیم با طول معین که یک خط سطح آن را نصف و نیمهٔ آن را نیز نصف کند. هرچه این عمل بیش‌تر تکرار شود، خط منصف به ضلع دیگر مربع نزدیک‌تر می‌شود، اما هرگز به آن نمی‌رسد[21] (شکل ۱۰) (همان: ج ۶، ۷۸).



شکل ۱۰. تقسیمات متوالی سطح مربع

اگر وسط خط منصف را با نقطهٔ M نشان دهیم، OM بـه AB نزدیـک مـی‌شـود، ولـی هرگز به آن نمی‌رسد.

می‌بینیم که در این برهان خط مفهوم مجرد هندسی ندارد، بلکه کمیتی اسـت مقیـد بـه نوعی معادله. اگر طول مربع را 2a فرض کنیم، مقدار OM برابر یک سری هندسی می‌شود با قدر نسبت ½:

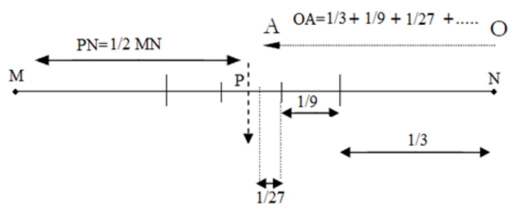
$$OMOM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{8}a + \cdots = \sum_{n=0} \frac{1}{2^{n}} a \qquad \text{(رابطهٔ ۲)}$$

وقتی این سری هندسی به‌سمت بی‌نهایت میل کند، حد آن به‌سمت صفر میل مـی‌کنـد، ولی هرگز صفر نمی‌شود.

۲. مثال بعدی فخر رازی مشابه مثال قبل است که، به‌نقل‌از *المصادرات* ابن‌هیثم، به یک نامساوی اشاره دارد (همان: ج ۶، ۸۱–۸۲).[۲۲] این نامساوی را می‌توان به‌زبان ریاضی نوین چنین نوشت:

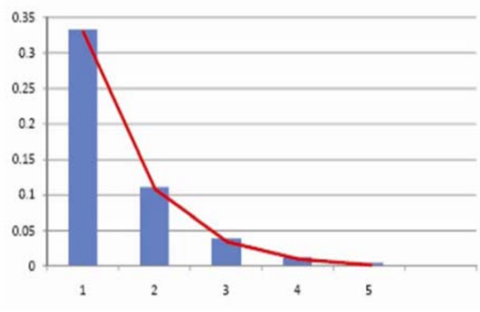
(رابطهٔ ۳)
$$\sum_{i=1} \frac{1}{n^i} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots < \frac{1}{n-1}$$

این نامساوی حالتی از مثال قبل است که در آن $a = 1$ و $n = 2$ فرض شده بود. اگر بخواهیم این نامساوی را برای $n = 3$ روی شکلی در نظر بگیریم، چنین خواهد بود (شکل ۱۱) که در آن OA به ½ بسیار نزدیک می‌شود، ولی هرگز برابر ½ نمی‌شود.



شکل ۱۱. نامساوی ابن‌هیثم برای n=3

در این دو مثال اخیر، فخر رازی سری‌هایی را نشان داده است که مقدار آن‌ها به حدی نزدیک می‌شود، ولی هرگز برابر آن حد نمی‌شود. وی این استدلال‌ها را برای دو خطی آورده است که به‌هم نزدیک می‌شوند، ولی هرگز به‌هم نمی‌رسند. این مقداری که هرگز صفر نمی‌شود سطح پوشانندهٔ یک منحنی و خط مجانبش است. به‌عبارتی، سطح زیر یک منحنیِ دیگر است که مشتق عبارتی است که در این‌جا بر آن تاکید شده است. برای مثال در حالتِ قبلی این عبارت سطحِ منحنی $f(x) = \frac{1}{3^x}$ است (شکل ۱۲). هم‌چنان‌که در شکل مشاهد می‌شود، منحنی به ½ نزدیک می‌شود، ولی هرگز برابر آن نمی‌شود.



شکل ۱۲. منحنی نامساوی ابن‌هیثم

در این مثال‌ها می‌بینیم که منظور فخر رازی از دو خطی که به‌هم نزدیک می‌شوند و به‌هم نمی‌رسند یک خط راست و یک منحنی است. همین‌جاست که اشتباه فخر رازی روشن می‌شود؛ زیرا اصل پنجم اقلیدس که به آن استناد می‌کند بین دو خط راست برقرار است.[۲۳] اما بررسی به این‌جا ختم نمی‌شود که به ناآگاهی و اشتباه بودن استدلال هندسی فخر رازی حکم دهیم. واضح است که با هندسهٔ کلاسیک نمی‌توان اتم‌گرایی هندسی را توجیه کرد، اما از براهین فخر رازی هم نمی‌توان به‌سادگی گذشت. او در همین مبحث علم ابن‌سینا در هندسه را مختصر می‌داند و دیدیم که شواهدی نیز از ابن‌هیثم می‌آورد که از پیش‌روترین هندسه‌دانان روزگار خود بوده است.[۲۴] او استدلال ابن‌هیثم را دچار اشکال می‌داند؛ به این دلیل که مقدمات وی براساس کرهٔ متحرک است.[۲۵] این اشارات ما را به این نکته ره‌نمون می‌سازد تا براهین هندسی فخر رازی را جدی‌تر بگیریم و بدانیم که او در هندسه ناوارد نیست.

چنان‌که پیش‌تر هم اشاره شد، اِشکال جدی‌ای که فخر رازی به هندسه وارد می‌داند مفهوم دایره است؛ چراکه خطی یک طرف آن ثابت فرض شده است و طرف دیگر متحرک. فهم مفهوم حرکت در هندسه مستلزم درنظرگرفتن مفهوم زمان است و این نکته در تناقض قرار می‌گیرد با ویژگی غیرزمان‌مندبودن براهین در هندسهٔ کلاسیک.[۲۶] فخر رازی یا باید مفهوم دایره را کنار گذارد یا به خود حق دهد که حرکت اَشکال هندسی را در طول زمان نیز در نظر بگیرد. براساس استدلال وی، در هر دو حالت، مدعای تشکیل خط از نقاط موجه می‌شود. اگر خطی را که یک سر آن ثابت است دوران دهیم، از گردش لحظه‌به‌لحظهٔ یک نقطه در طول زمان و در مکان‌های متوالی، دایره‌ای متشکل از نقاط به‌وجود می‌آید (شکل ۱۳). این استدلال شبیه برهانی است که متکلمان پیش‌تر برای اثبات مدعای خود به‌کار برده‌اند؛ یعنی سرِ خط در هر لحظهٔ تقسیم‌ناپذیر (آن) در یک مکان قرار می‌گیرد.

شکل ۱۳. تشکیل دایره از به‌هم‌پیوستن نقاطی که هریک در یک لحظه تقسیم‌ناپذیرند

از این دیدگاه چنین نتایجی حاصل می‌شود:

۱. همان‌گونه‌که در شکل ۱۴ می‌بینیم، دایرهٔ کامل وجود ندارد. با این نگاه، دایره تبدیل به چندضلعی می‌شود و زاویهٔ بین دایره و خط مماس معنادار می‌شود؛ طوری‌که حتی ممکن است غیر صفر باشد.

شکل ۱۴. دایره‌ای که درحقیقت چندضلعی باشد

۲. خمش و انحنا بی‌مفهوم می‌شود. این مسئله نیز در بطن نکتهٔ قبل وجود دارد. با نداشتن دایرهٔ کامل، خمش و انحنا را نیز از دست خواهیم داد. درنتیجه، تفاوت ماهوی بین خط مجانب و شاخه‌ای از منحنی وجود نخواهد داشت. در چنین دیدگاهی، اعتبار به مقدار داده می‌شود و هر معادلهٔ جبری مفهوم خط را دارد که در هندسهٔ اقلیدسی چنین رویکردی وجود ندارد.

۵. استدلال فخر رازی و تاریخ بی‌نهایت کوچک‌ها و اصل پیوستگی

به‌علت تفاوت ماهوی میان ریاضیات و سایر علوم، در تاریخ ریاضیات، کم‌تر شاهد افول و سقوط نظریه‌ها هستیم. باوجوداین، برخلاف روند به‌نسبت خطیِ تاریخ این علم، مباحث فلسفی ریاضیات افت‌وخیزهای بسیار داشته‌اند. نظریه‌های ناب ریاضی برآمده از توازنی است که بین نظریات گاه متضاد فلسفی برقرار شده است.

اتم‌گرایی کلام دربرگیرندهٔ بخشی از گفتمان تقسیم‌پذیری خط است که گرچه امروز ازنظر مبانی ریاضیاتی پذیرفتنی نیست، می‌توان با ملاحظاتی آن را بخشی از تاریخ بی‌نهایت کوچک‌ها (infinitesimals) دانست. هرچند در این بین نیازمند کار جدی روی متون اصلی قبل و بعد فخر رازی هستیم. ما با درک فرایند توازنی که بین نظریات رقیب در این حوزه برقرار شده است بهتر می‌توانیم دریابیم که فخر رازی در میان رسائل ابن‌هیثم به‌دنبال چه بوده است. قضیهٔ ابن‌هیثم که فخر رازی بر آن دست گذاشته است از زمرهٔ قضایای موسوم به روش افناست (the method of exhaustion) که درواقع پدر حساب دیفرانسیل ــ انتگرال

محسوب می‌شود. در این روش، برای اندازه‌گیری طول منحنی، آن را مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها درنظر می‌گیرند، به‌نحوی‌که بتوان آن قطعه‌طول را یک خط راست فرض کرد. هم‌چنین برای اندازه‌گیری سطح زیر منحنی نیز آن سطح را مجموعه‌ای از سطوح کوچک در نظر می‌گیرند، به‌نحوی‌که مساحت آن سطح کوچک را، به‌سادگی، بتوان اندازه‌گیری کرد. درنهایت، جمع طول‌ها یا مساحت‌های اندازه‌گیری‌شده اندازهٔ طول یا سطح زیر منحنی را به ما می‌دهد (هیث ۱۳۸۱: ۱۸۰–۱۸۷). برای مثال، در اندازه‌گیری محیط دایره، آن را یک چندضلعی با اضلاع متعدد فرض می‌کنیم که به‌تقریب بتوان هر ضلع را یک خط راست در نظر گرفت. به‌بیان‌دیگر، هر دایره مجموعه‌ای از پاره‌خط‌های طولی بسیار کوچک در نظر گرفته می‌شود. حال، می‌توان پرسش بسیار مهمی مطرح کرد: این پاره‌خط‌های بسیار کوچک تا چه حد کوچک‌اند؟ به‌بیان‌دیگر تا کجا می‌توان یک منحنی را تقسیم کرد. هندسهٔ کلاسیک مؤید دیدگاه ارسطویی دال بر امکان تقسیم بی‌نهایتِ خط است؛ اما برای حل مسائل به‌روش افنا، پاسخ این سؤال را وضعیت مسئله تعیین می‌کند. این تقسیمات تا اندازه‌ای کوچک می‌شوند که هندسه‌دان قادر به محاسبه‌شان باشد. مثلاً، برای اندازه‌گیری محیط یک دایره، دایرهٔ محاط و محیط بین دو چندضلعی در نظر گرفته می‌شود.

نکته‌ای که به این مبحث مربوط می‌شود بحث امکان تقسیمات متوالی است؛ چراکه اگر خط را تا بی‌نهایت تقسیم‌پذیر فرض کنیم، با معضلات حوزهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها و متناقض‌نماهای زنون درگیر می‌شویم. درحالی‌که روش افنا، با دلالت بر لم[۲۷] ارشمیدس، هندسه‌دانان را از درگیری با این مسئلهٔ بغرنج می‌رهاند.

لم ارشمیدس: «برای دو مقدار نامساوی، اگر نیمی از مقدار بزرگ‌تر از آن جدا شود و از باقی‌مانده نیز نیمی دیگر و همین‌طور تا به آخر، آن‌چه باقی می‌ماند از مقدار کوچک‌تر اولیه کوچک‌تر خواهد بود»[۲۸] (Heath 1897: xlviii).[۲۹]

این اصل که با عبارات متفاوت قابل‌بیان است به هندسه‌دان اجازه می‌دهد یک کمیت را تا جای لازم، بدون دغدغهٔ درگیری با معضل بی‌نهایت‌ها، کوچک فرض کند. به‌عبارتی، هرقدر یک کمیت تقسیم شود، همواره کمیت کوچکی خواهیم داشت. این لم بیان دیگری از پیوستگی کمیت‌ها و نهادینه‌کردن آموزهٔ پیوسته‌گرایی در هندسه است. اما نکتهٔ واجد اهمیت این است که تقسیماتی که در دیدگاه ارسطویی تقسیمات بالقوه و عنصری فاقد تعریف و شکل مشخص بود، در این صورت‌بندی، عنصری با شکل مشخص و در یک کمیت پیوسته در نظر گرفته می‌شود.[۳۰] تشخص‌دادن به یک عنصر بسیار خُرد به تقسیم بالقوه ماهیت بالفعل می‌دهد. همین نکته برای فخر رازی جذاب و قابل‌پی‌گیری بوده است:

به‌رسمیت‌شناختن یک سازهٔ بسیار کوچکِ بالفعل که خط یا هر کمیت دیگـر از آن سـاخته شده باشد. لم ارشمیدس به فخر رازی امکان داد تا او در هندسه به‌شکل تبیـین‌یافتـه‌ای بـه یک جزء خُرد بالفعل دست پیدا کند: به چیـزی کـه بـه‌زعـم او جـوهر فـرد اسـت. او در بحث‌های مستقلی به اثبات این نکته پرداخته است: هر تقسیمی که تعین پیـدا کنـد بالفعـل می‌شود. پس این عنصر خُردی که مشخص و معلوم است دیگر بالقوه نیست، بلکه بالفعـل است.[۳۱] حال باید اثبات کند که کوچک‌تر از این عنصر ممکن نیست و تقسـیمات بایـد در جایی متوقف شود. بـرای بررسـی بـیش‌تـر، دوبـاره، لـم ارشـمیدس را بـه‌زبـان ریاضـی نوین می‌نوسیم:

اگر برای دو مقدار معینِ نابرابر A و B که A بزرگ‌تر باشد کسـری از A برداشـته شـود (A/n)، و دوباره از باقی‌مانده A/n دیگری جدا کنیم، و همین‌طور تا به آخـر، آن‌چـه بـاقی می‌ماند A/n^i از B کوچک‌تر می‌شود. به‌عبارتی به تابع زیر دست پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{A}{n^i} \qquad \text{(رابطهٔ ۴)}$$

این همان مسئله‌ای است که فخر رازی در *مطالب العالیه*، با اقتباس از ابـن‌هیـثم، بـر آن متوقف شده بود و قصد داشت استدلال کند، اگر این تقسیمات در جـایی متوقـف نشـود، اصل پنجم اقلیدس نقض خواهد شد. استدلالی که با خَلط دو مبحث متناقض‌گونه اسـت و عاجز از اثبات مدعای مدنظر وی.

باوجوداین در این حرکتِ عقیمِ فخر رازی می‌توان شاهد نکته‌ای در فلسـفهٔ ریاضـیات بود که می‌توان آن را حرکتی به‌سمت صـورت‌بنـدی اصـل پیوسـتگی (low of continuity) دانست، و آن بالفعل دانستن یک عنصر در روش افناست؛ مسئله‌ای که هندسه‌دانـان بـه آن بی‌توجه بودند. بی‌توجهی ایشان به‌این علت بود که بالقوه یا بالفعـل‌بـودگی عنصـر، بیش از این‌که ریاضیاتی باشد، فیزیکی است. اگر این منحنی‌ها نمایـان‌گـر تغییـرات در طبیعت باشند و موجودات صرفاً تجریدی نباشند، آن‌گاه بالفعـل‌بـودن آن‌هـا معنـا پیـدا می‌کند. ازنظر فخر رازی که در تبیین حرکت نیز از اتم‌گرایی هندسی استفاده کرده است (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۲۹–۴۶). بالفعل‌بودگی و واقعی‌بودگی عنصر بسیار بااهمیت است.[۳۲]

برای درک بهتر جایگاه استدلال فخر رازی در تاریخ بی‌نهایت کوچک‌ها، باید بـه اصـل پیوستگی بپردازیم. اصل پیوستگی که لایب‌نیتس در قرن هفدهم صورت‌بندی‌اش کـرد بـه سراسر طبیعت نگاه پیوسته‌گرایانه دارد. استدلال او این بود که تغییرات در طبیعت به‌شـکل تدریجی صورت می‌گیرد و به‌عبارت‌دیگر می‌توان هر تغییر کلی را به تغییرات جزئـی‌تـری

خُرد کرد. این پیوسته‌گرایی یک تفاوت اساسی با پیوسته‌گرایی ارسطویی دارد. حرکت از دید ارسطو واحدی تجزیه‌ناپذیر و غایت‌انگارانه است. به‌بیان‌دیگر تقسیمات موجود در بازهٔ زمانی ناظر بر حرکت، همگی، بالقوه‌اند؛ حال‌آن‌که حرکت نزد لایب‌نیتس حرکت یک واحد نیست، بلکه مجموعه‌ای از تغییرات جزئی است. اجزایی که در این حرکتِ پیوسته در نظر گرفته می‌شوند بالفعل و موجودند (Jorgensen 2009).

صورت‌بندی فلسفی ـ ریاضیِ اصل پیوستگی را، پیش از لایب‌نیتس، می‌توان در آثار نیکولاس کوزایی مشاهده کرد. کوزایی تقسیمات متصور در خط را بی‌انتها و بالقوه می‌داند. اما هر جزء از تقسیم عنصری بالفعل است (Bell 2006: 55-62).[۳۳] کوزایی نیز مانند فخر رازی برای بالفعل‌بودن عنصر به زاویهٔ شاخکی و افنا رجوع کرده است (Wertz 2001). ما نمی‌دانیم که آیا بین کوزایی و فخر رازی رابطه‌ای فکری بوده است یا نه؟[۳۴] پرسشی که سؤال باز این مقاله می‌ماند.[۳۵] به‌هرروی، هرچند این بحث در آن برههٔ زمانی به‌دست فخر رازی به‌ثمر ننشسته است، نشان‌دهندهٔ چیره‌دستی او در مباحث فلسفهٔ ریاضی روزگار خود بوده است، که به‌لحاظ تاریخی ارزش‌مند است.

۶. گامی به‌سوی هندسه‌ای جدید

ازآن‌جاکه فخر رازی انتقاداتی به هندسهٔ اقلیدسی داشته است، سعی کرده است از میان مباحث مربوط به هندسهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها براهینی موافق اتم‌گرایی ارائه دهد. چهارچوبی که او در تحلیل مباحث هندسی دارد متفاوت با چهارچوب هندسه اقلیدسی است. باوجوداین، به‌زعم من، نمی‌توان به‌سادگی عبارتی را که ستیه (۲۰۰۶) برای آرای فخر رازی در هندسه به‌کار برده است صحیح دانست: هندسهٔ نااقلیدسیِ علمِ کلام! زیرا با تمام تلاش‌های فخر رازی، او به یک نظام خودسازگار که قادر به حل مسائل هندسی خود باشد دست نیافته است.[۳۶] عبارت مذکور ممکن است این شبهه را به‌وجود آورد که متکلمانی چون فخر رازی مانند لباچفسکی توانسته‌اند با تعمیم و بیان شکل کلی‌تر اصل پنجم هندسهٔ اقلیدسی (اصل توازی) هندسه‌ای خودسازگار به‌وجود آورند. بنابراین عبارت «هندسهٔ نااقلیدسی فخر رازی» اغراق‌آمیز و محل اِشکال است که باید بیش‌تر درباره‌اش دقت کرد. آن‌چه مورخان به آن لقب هندسهٔ نااقلیدسی داده‌اند درنظرگرفتن حالات دیگر برای اصل پنجم هندسهٔ اقلیدسی بوده است (Coxeter 1998: 2). در مثال‌هایی که آورده شد، فخر رازی مشکلی با اصل پنجم ندارد و حتی سعی هم نکرده است که آن اصل را به‌پرسش بکشد. او

تنها استدلال کرده است که این اصل با بخش‌پذیری نامتناهیِ مقادیر و خط تناقض دارد. از این منظر، او هیچ معنایی از هندسهٔ نااقلیدسی در ذهن ندارد.

بنابر تعاریفی که کتاب *اصول* اقلیدس با آن‌ها شروع می‌شود، مفهوم نقطه و خط هردو با استدلال‌های فخر رازی در تناقض قرار می‌گیرند. طبق تعاریف آمده در اصول، نقطه فاقد بُعد و نهایت خط است و خط نیز نهایت سطح (Euclid 1098: vol. I, 153-154)؛ حال‌آن‌که در تبیین رازی نقطه نهایت خط نیست (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۵۴–۵۵)، خط نیز نهایت سطح نیست؛ سطح نیز نهایت حجم؛ بلکه نقطه سازندهٔ خط، خط سازندهٔ سطح، و سطح نیز سازندهٔ حجم است (همان: ج ۶، ۹). تبیین مذکور، آشکارا، هر سه اصل‌موضوع اول اقلیدس را نقض می‌کند: نه دلیلی وجود دارد که بین دو نقطه خطی باشد؛ نه خط مستقیم راست پیوسته‌ای وجود دارد؛ نه دایرهٔ کاملی وجود دارد (Euclid 1098: vol. I, 154-155). نظامی که اتم‌گرایی کلام ارائه می‌دهد، اگر هندسه باشد، اقلیدسی نیست؛ ولی به‌مفهوم متعارف در تاریخ ریاضیات نااقلیدسی هم نیست.

می‌توان تلاش فکری فخر رازی را ازمنظر فلسفهٔ علم نیز ارزیابی کرد. او در برخورد با علم هندسه از تنگنای معرفت‌شناختی گذر نمی‌کند. او استدلال می‌کند که نمی‌توان هر چیزی را به‌نحو نامحدود در ذهن تقسیم کرد. حتی ذهن هم در تصور بسیار کوچک‌ها محدودیت دارد. اوT با درک شکاکیتی که علم بشری در این حوزه به آن دچار است، تنها در حد بحث امکان وجود اتم‌ها به هندسه وارد می‌شود. همین نکته مصداقی است که او علم هندسه را با تعریف پذیرفته‌شدهٔ کلاسیکِ ارسطویی، مبنی‌بر علم جواهری که از عالم مادی مجرد شوند، نمی‌پذیرد.[۳۷] قرار نیست که رازی دنبال امری مجرد صرفاً ذهنی از دنیای مادی یا نگاهی مهندسانه به هندسه رود. او به‌اندازه‌ای هندسه را می‌خواهد که پاسخ‌گوی مسائل هستی‌شناختی‌اش باشد.

ازاین‌رو، او خط را معادل یک عبارت جبری می‌گیرد. حتی می‌توان گفت که وی خط و اَشکال هندسی را واجد ساختاری متفاوت با ساختار هندسهٔ اقلیدسی می‌بیند. او بااین‌که نتوانسته است (یا از اساس نخواسته) یک هندسهٔ نااقلیدسی متعارف بپروراند، اما قادر بوده است که غیراقلیدسی فکر کند.[۳۸] به‌بیان‌دیگر او توانسته است چهارچوب هندسهٔ اقلیدسی را بشکند و تصور کند که می‌توان هندسه‌ای جز هندسهٔ اقلیدسی را در نظر داشت. نکتهٔ مذکور اهمیت بسیار دارد؛ زیرا رویکرد فخر رازی، در جریان پیشرفت فلسفیِ ریاضیات در دنیای اسلام، جایگاه درخوری دارد. اصولاً اهمیت تاریخ ریاضیات در دورهٔ اسلامی به‌واسطهٔ همین

ساختارشکنی‌های فلسفی در مبانی بنیادی ریاضیات است.[۳۹] بی‌شک، با ادامهٔ بررسی تأثیرهای فخر رازی بر نسل‌های بعدی خود، قادر خواهیم بود فرایند تغییر نگرش‌ها دربارهٔ مفاهیم را بهتر دنبال کنیم و به دلایل بارورشدن یا عقیم‌ماندن آن‌ها دست یازیم.

۷. نتیجه‌گیری

در ابتدای این مقاله از این گفتیم که اتم‌گرایی کلام براساس متون فخر رازی چه نگاهی به مفاهیم هندسی دارد، که همانا تشکیل خط از نقاط تقسیم‌ناپذیر بود. واضح است که این دیدگاه با هندسهٔ کلاسیک اقلیدسی ناسازگار است. فخر رازی در رویارویی با این ناسازگاری‌ها در دو راستا تلاش می‌کند: ۱. کنارزدن هندسه به دلایل معرفت‌شناختی و ناسازگاری‌های زیربنایی با اتم‌گرایی و مسائلی که ازنگاه فخر رازی مقدمات سست علم هندسه است؛ ۲. تلاش برای یافتن نقاطی که بتوان از آن به‌نفع اتم‌گرایی بهره گیرد. دراین‌میان، او به تحلیل برخی مسائل مهم هندسی روزگار خود پرداخته است. پس از این‌که مسائل از متون عربی قدیم به زبان ریاضی جدید بازنویسی شد، در تحلیل رویکرد فخر رازی، به چگونگی استدلال‌آوری وی در توجیه مسائل دست یافتیم. درنهایت به این جمع‌بندی رسیدیم که گرچه فخر رازی از پروراندن یک مکتب هندسی مستقل از هندسهٔ اقلیدسی ناتوان بود، توانست در زمان خود، برخلاف چهارچوب رایج، غیراقلیدسی به هندسه بنگرد و امکانِ شکل‌دادن به هندسه‌ای با چهارچوبی متفاوت را در نظر آورد. ازاین‌رو، خط مشی وی حرکتی نبوغ‌آمیز در تاریخ فلسفهٔ ریاضیات است.

پی‌نوشت‌ها

۱ . نباید پیوسته‌گرایی (continuism) را با اصل پیوستگی (continuity principle یا low of continuity) اشتباه گرفت. اگرچه این اصل در مکتب پیوسته‌گرایی شکل می‌گیرد، به‌لحاظ تاریخی در قرن هفدهم به‌شکل صورت‌بندی‌شده وارد ریاضیات می‌شود. در برههٔ تاریخی مدنظر این مقاله، ریاضیات، به‌لحاظ فلسفی، به این درجه از تکامل و پختگی نرسیده بود (Bell 2006: 86-92).

۲. پیوسته‌گرایی می‌تواند فیزیکی باشد، اگر بر این باور باشیم که می‌توان اجسام طبیعی را تا بی‌نهایت تقسیم کرد، طوری‌که هر جزء هرچند کوچک نیز دارای خصوصیات جسم باشد. ریاضیاتی هم می‌تواند باشد، یعنی کمیات و موجودات مجرد را بتوان تا بی‌نهایت تقسیم کرد. پیوسته‌گرایی فیزیکی شامل پیوسته‌گرایی ریاضی هم می‌شود، ولی برعکس آن برقرار نیست.

می‌توان کمیات مجرد را پیوسته در نظر گرفت، ولی اجسام طبیعی را متشکل از تقسیم‌ناپذیرها دانست (Eftekhari 2017: 61-62).

۳. هندسه‌دانان بسیاری در اصول موضوعهٔ هندسهٔ اقلیدسی، به‌خصوص اصل پنجم، بحث کرده‌اند؛ ازاین‌منظر که یک اصل موضوعه است یا یک قضیه. اما در قرون وسطی تعاریف کلاسیک تقریباً بدون مناقشه پذیرفته شده است.

۴. در این خصوص که آیا اتم‌گرایان مسلمان، آگاهانه، اتم و نقطه را معادل یا غیرمعادل هم گرفته باشند بین مورخان اختلاف‌نظر هست. در این مقاله که به برههٔ تاریخی دورهٔ دوم اتم‌گرایی می‌نگرد، به‌طور قطع نقطه و اتم معادل هم‌اند (Eftekhari 2017: 28-32).

۵. *جزء لا یتجزا* ازنظر واژگانی به‌معنای جزئی است که تجزیه نمی‌شود و معادل کلمهٔ ***Atomos*** یونانی است، به‌معنای تجزیه‌ناپذیر. در متون عربی عبارت **جزء لایتجزا** به‌معنای اتم به‌شکل عمومی به‌کار رفته است. عبارت دیگری که عمدتاً متکلمان به‌کار برده‌اند **الجوهر الفرد** است. جوهر فرد به نظریهٔ خاص متکلمان برمی‌گردد که هستی را متشکل از جواهر فرد یا اتم‌ها می‌دانستند. اتم‌ها تنها هستومندهای قائم‌به‌ذات یا جواهر در هستی‌اند.

۶. او در کتاب‌هایی *مانند المباحث المشرقیة* و در کتاب‌های آخرین خود مانند *المطالب العالیة* از از موضع مشائیان دفاع کرده است. اما حتی درمقام دفاع هم از طرح اشکالات وارد خودداری نکرده و همهٔ ضعف‌ها و کاستی‌ها را نیز ذکر کرده است (افتخاری ۱۳۸۶: ۷۰–۱۴۰) (در این رساله رویکرد فخر رازی در این دو کتاب مقایسه شده است).

۷. این اشکالی است که فخر رازی در زمانی که اتم‌گرا نبوده است بر ضد اتم‌گرایان مطرح می‌کند. (رازی ۱۹۹۰: ج ۲، ۴۱). او در کتاب‌هایی که در دفاع از اتم‌گرایی نوشته است نیز ذکر کرده است که بهتر است متکلمان بر این برهان تأکید نکنند (رازی ۲۰۱۷: ۲۳۶؛ رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۵۲–۵۳).

۸. هرچند بعضی اوقات ادعا شود که اتم‌ها بُعدی ندارند.

۹. این استدلال در اصل متعلق به ارسطوست که به شبهه تماس مشهور است (Aristotle 2005: 138-139 (Bekker: 231b6)).

۱۰. اما اتم‌گراها در این مسئله دچار تشدد و اختلاف بسیار بوده‌اند. از متون این‌طور برداشت می‌شود که نظر فخر رازی مبنی‌بر بُعددار بودن اتم‌هاست (Eftekhari 2017: 121).

۱۱. واعلم: أن الهندسة من أوله الی آخره، یبطل القول بالجوهر الفرد،. والذی شرحناه فی هذا الموضع، هو قلیل من کثیر. فمن أثبت الجوهر الفرد، وجب علیه الطعن فی علوم الهندسة (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۱۶۶).

۱۲. شایان ذکر است که فخر رازی در دفاع از اتم‌گرایی بیش‌تر بر برهان حرکت تکیه دارد. او با حرکت ارسطویی ـ ابن سینایی مخالف بوده است و آشکارا از نظریهٔ حرکت اتم‌گرایی کلام

به‌مثابهٔ نظریهٔ برتر دفاع کرده است. این برهان دلیل اصلی دفاع فخر رازی از اتم‌گرایی هندسی است که پرداختن به آن خارج از موضوع این مقاله است (Eftekhari 2017: 72-84).

۱۳. برای اثبات این ادعا، فخر رازی مثالی از چندضلعی‌ها آورده است. وی تعمیم‌دادن حکم مربوط به چندضلعی با اضلاع کم به تعداد اضلاعی که به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کنند را که استقرایی است ضعیف می‌داند و همین نکته را دلیلی برای نقصان عقل بشر می‌بیند.

> وأما أصحاب علوم المخروطات، فقد تکلفوا طریقة فی إثبات المسبعوا المتسعوأ ما البقیة فی موقف العجز و القصور. فقد ظهر بما ذکرنا: آدالعقول البشریة قاصرة، والأفهام الإنسانیة غیر وافیة بإدراک حقائق الأشیاء إلا فی القلیل القلیل من الکثیر الکثیر فی معرفة هذه المحسوسات فما ظنک بالعقل عند طلوع النورالاهیه (و سطوع) الأضواء الصمدیة؟ (الرازی ۱۹۸۷: ج ۱، ۴۶).

۱۴. فنقول: الحق، أن جوهر الفرد. لا کرة و لا مضلع. لأن هذا أنما یعقل فیما مؤلفان من الجوانب و البعاض. والجوهر الفرد ألیس کذلک. فلا یمکن وصفه بشیء من هذه الصفات (الرازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۱۴۶).

۱۵. در کتاب *إثبات*، فخررازی این مسائل را ذیل «تشنیعات» آورده است، به این مفهوم که اگر اتم را نپذیریم مجبوریم به این نتایج شنیع (یعنی نقض اصول بدیهی و پذیرفته‌شده) تن دهیم (رازی ۲۰۱۷: ۲۵۰–۲۵۲).

۱۶. إن القول بقبول القسمة إلی غیر النهایة، یقتضی وجود مقدارین مختلفین فی العظم. ثم إن الزائد یتناقض إلی غیر النهایة، والناقص یتزاید إلی غیر النهایة. ثم لا یبلغ هذا الناقص مع التزاید أبداً إلی حد ذلک الزائد، مع تناقصه أبداً. ومعلوم أن ذلک بعید فی العقول (الرازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۷۶).

۱۷. قابل‌پیگیری است که از چه زمانی بحث زاویه بین دایره و خط ریشه گرفت. این زاویه در *اصول* اقلیدس در بخش تعاریف مقالهٔ سوم تعریف شده است (Euclid 1908: vol. II, 1, 8th definition). هم‌چنین آن‌چه فخر رازی عنوان کرده است در قضیهٔ شانزدهم (فخر رازی به‌اشتباه گفته است پانزدهم. شاید هم در نسخه‌ای که او در دست داشته است پانزدهم بوده است.) عنوان شده است (اثبات نمی‌شود). به‌نظر می‌رسد که در قرون وسطی نیز هم‌چنان بحث زاویهٔ شاخکی رایج بوده است (Wertz 2001). آن‌چه در این مقاله مدنظر است این است که چه‌طور در چهارچوب استدلالی فخر رازی این زاویه می‌توانسته است غیر صفر و کم‌ترین مقدار زاویه باشد.

۱۸. فخر رازی در این برهان، با استناد به اقلیدس، از زاویهٔ داخلی دایره یا متمم همان زاویهٔ شاخکی از بزرگ‌ترین زاویهٔ ممکن حاده نیز اسم برده و متناظراً این استدلال را نیز برای آن درصورت کوچک شدن این زاویهٔ متمم تعمیم داده است. اما در بررسی‌های انجام‌شده به مستندی از اقلیدس برنخوردم. لازم است بررسی‌های بیش‌تری انجام شود.

۱۹. اصل برهان: «إن "أبلونیوس" بین فی کتاب "المخروطات" وجود خطین بتقاربان أبداً و لا یلتقیان و ذلک یدل إلی غیر النهایة، لا یوجب حصول الالتقاء» (الرازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۷۸).

۲۰. إن کل مضلع، فإنه إذا أخرج ضلعه إلی خارج، حدثت زاویة فی الخارج. و کلما کانت الأضلاع أکثر، کانت الزاویة الداخلة أوسع، فصارت الزاویة الحادثة فی الخارج أزید. ولما کان لا نهایة لمراتب المضلعات، فکذلک لا نهایة لمراتب ذلک القرب. مع أنه یستحیل أن یصل إلیه. إذ لو وصل إلیه، لاتصل أحد الضلعین بالضلع الآخر. علی الإستقامة. وحینئذٍ یصیر الخط کله مستقیماً، ویصیر المضلع غیر مضلع (الرازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۷۸–۷۹).

۲۱. إن علم الهندسة مبنی علی نفی الجوهر الفرد. إذا ثبت هذا، فلنفرض سطحاً مربعاً. بین أحد الضلعین والآخر بعد معین. فإذا نصفنا ذلک السطح، صار هذا الخط الذی أوجب التنصیف، أقرب إلی أحد الطرفین. فإذا نصفنا ذلک النصف، صار هذا الخط الثانی، أقرب. ثم لما کان ذلک السطح یقبل التنصیف إلی غیر النهایة، فحینئذ یکون الخط القاسم، لایزال یقرب من ذلک الطرف إلی غیر النهایة. و البتة لا یصل إلیه. اذ لو وصل إلیه، لکان احتمال قبول ذلک السطح للقسمة متناهیاً. و قد فرضناه غیر متناه. فثبت: وجود خطین یتقاربان أبداً و لا یلتقیان (الرازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۷۸).

۲۲. إن «لأبی علی بن الهیثم» رسالة فی بیان أن کل مقدار یفصل منه جزء من أجزائه، ویفصل من الباقی جزء: نسبة إلی الجزء الأول، مثل نسبة الجزء الأول إلی الکل. ویفعل ذلک دائماً. فإن [جمیع] تلک الأجزاء المأخوذة علی تلک النسبة إلی غیر النهایة، إذا جمعت فلیس تبلغ جملتها إلی الجزء، الذی کان أعظم من الجزء الأول: مثاله: إن العشر، و عشر العشر، وعشر عشر العشر. و هکذا إلی أبعد الغایات،أبلغ النهایات. فإنه لیس یبلغ مجموعها إلی التسع. وکذلک: التسع، و تسع التسع، إلی أبلغ الغایات. لا یبلغ مجموعها إلی الثمن. و هکذا جمیع الأجزاء. وأنت تعلم أن قسمة الواحد إلی الکسور، لا یحتمله إلا الواحد المقداری. و الخط القاسم له إلی تلک الأجزاء، لا یزال یقرب من طرفه، مع أنه لا یصل البتة إلیه (الرازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۸۱–۸۲).

۲۳. این قضیه بین دو خط راست برقرار است، اما اقلیدس خط راست را تنها فاصلهٔ واصل بین دو نقطه معرفی کرده است، نه حتی کوتاه‌ترین فاصله (Euclid 1908: vol. I, 153). ازاین‌رو، بعدها مورخان و ریاضی‌دانان دربارهٔ مشکل‌دار بودن تعریف خط راست و مشکل‌دار بودن اصول موضوعهٔ مرتبط با خط راست در *اصول* اقلیدس بحث کرده‌اند (هیث ۱۳۸۱: ۲۰۱؛ Coxeter 1998: 2).

۲۴. دربارهٔ ارتباط فکری فخر رازی با آثار ابن‌هیثم، بنگرید به معصومی ۱۳۹۲. در این مقاله، به‌تفصیل به اقتباس‌هایی پرداخته شده است که فخر رازی در آثار خود از ابن هیثم کرده است و نیز دخل‌وتصرفاتی که در آن‌ها کرده است. از مطالبی که مکمل این بحث است براهینی است که ضد اتم‌گرایی به‌کار رفته است که در کتاب *بی‌نهایت کوچک‌ها* از رشدی راشد نیز آمده

است (برهان تقسیم خط) که در این مقاله به آن پرداخته نشده است. در این مقاله هدف بیش‌تر بررسی تلاش هندسی فخر رازی در برهان‌های اثبات‌کننده است.

۲۵. در این مقاله مجالی نبود که بررسی کنیم که انتقاد فخر رازی بر ابن‌هیثم دقیقاً به چه برمی‌گردد. او انتقادی کلی بر هندسهٔ اقلیدسی دارد که بحث عمده‌اش بر مفهوم دایره استوار است و در یک فصل از *المطالب العالیة* (رازی ۱۹۷۸: ج ۶، ۱۳۹–۱۴۶) و *إثبات* (رازی ۲۰۱۷: ۲۷۲–۲۷۳) به آن پرداخته است که در مقاله به آن پرداختیم. این‌که آیا مقصود فخر رازی همین انتقاد است یا به برهان دیگری اشاره می‌کند نیاز به بررسی بیش‌تر، هم در آثار ابن‌هیثم و هم آثار خود فخر رازی، دارد.

۲۶. چهارچوب طبقه‌بندی علمی پساارسطویی، به‌طورعمده، معیار ارسطو را در طبقه‌بندی علم در نظر می‌گیرد. طبق تعریف ارسطو، هندسه علم پرداختن به صورت جواهر است، درصورتی‌که مجرد شوند. اگر این جواهر از آن جهت که متحرک‌اند در نظر گرفته شود (qua mobile)، موضوع علم فیزیک می‌شوند و نه هندسه. هندسه یا ریاضیات، به‌مفهوم عام، تهی‌کردن از جنبه‌های فیزیکی است (*abstract away from physical aspects*) (Studemann 2002).

۲۷. معادل lemma است و به‌معنای برهان کمکی یا قضیه‌ای که به‌مثابهٔ وسیله‌ای برای اثبات برهانی دیگر استفاده شود.

۲۸. این لم را می‌توان برای هر نسبتی به‌کار برد. این‌جا یک‌دوم بوده است، به همین شکل یک‌سوم، یک‌چهارم، و تا به آخر.

۲۹. ترجمه‌شده از متن اصلی:

> Given two unequal magnitudes, if from the greater [a part] to be subtracted greater than the half, if from the remainder[a part] greater than the half be subtracted, and so on continually, there will be left some magnitude which will be less than the lesser given magnitude (Heath 1897: xlviii).

۳۰. همین امکان به ریاضی‌دان اجازه می‌دهد حد مشخص یک کمیت را به‌دست آورد.

۳۱. نحوهٔ تقسیم و تمایز ازدیدگاه متکلمان و مشاییان متفاوت است. فیلسوفان برای تقسیم‌شدن سه راه عنوان کرده‌اند: ۱. وهم؛ ۲. قطع یا برش؛ ۳. اختلاف اعراض. با همهٔ اختلافات، هم فیلسوفان و هم متکلمان در این‌که اختلاف اعراض تمایز ایجاد می‌کند با هم وفاق داشته‌اند. اختلاف اعراض یعنی وقتی در یک امر واحد اعراضی با ویژگی‌های متفاوت مثل سرما و گرما، یا سپیدی و سیاهی حلول کند، سبب تمایز یا تقسیم در جسم واحد می‌شود؛ حتی اگر آن دو بخش با ویژگی‌های فیزیکی متفاوت از هم جدا نشده باشند (*انفصال النفکاکیة*). فخر رازی در فصل هفتم، مقالهٔ اول، جلد ششم از *المطالب العالیة* مفصل استدلال کرده است که تقسیم ایجادشده با اختلاف اعراض بالفعل است، نه بالقوه (رازی ۱۹۸۷: ج ۶، ۶۱–۶۷). یک عنصر خط یا سطح یا هر کمیتی، وقتی با یک معادله، مقدار، و مختصات معین شده باشد، دارای

عرض متفاوت با عنصر همسایه‌اش است. درنتیجه با ادلهٔ فخر رازی یک عنصر بالفعل است، نه بالقوه (Eftekhari 2017: 109-111).

۳۲. البته کار فکری فخر رازی فقط این استدلال بوده است که حرکتِ مجموعه حاصل تغییر اجزاست. این سخن راه بسیار دارد تا توصیف کمی حرکت با کمک منحنی. استدلال او بسیار خام‌تر از آنی است که بعدها لایب‌نیتس و سایر ریاضی ـ فیزیکدانان انجام دادند، هرچند دغدغهٔ او درخصوص بالفعل بودن تغییراتِ جزئی، ریشهٔ یک‌سان دارد.

۳۳. بین تبیین لایب‌نیتس و کوزایی تفاوت‌های اساسی وجود دارد؛ اما در بحث بالفعل بودن مشترک‌اند (Bell 2006: 92).

۳۴. آن‌چه از متون متأخر فخر رازی برمی‌آید، او بالقوه بودن را چون دیگر متکلمان اشعری رد می‌کند: هر هستومندی یا هست یا نیست. اگر هست، در یک آن به اذن فاعل مختار و مطلق هست می‌شود و بالفعل است و اگر نیست، دیگر نیست. پس وجود بالقوه معنا ندارد. نکتهٔ قابل‌تأملی ازنظر من در این بحث توجه و علاقهٔ رازی به نظام استدلالی‌ای است که به‌ظاهر و بنابه تأکید خود او با نظام استدلالی خودش ناسازگار است: نظامی که بر مبانی پیوسته‌گرایی و تقسیمات بالقوهٔ خط و حرکت استوار است. رازی تلاش کرده است تا تلفیقی بین این دو تبیین ناسازگار ایجاد کند. وی درنهایت به دیدگاهی دست می‌یابد که گرچه به سرانجامی که انتظار دارد نمی‌رسد، می‌توان آن را در تحول پیوسته‌گرایی به‌بحث گذاشت. به‌طور قطع با بررسی آرای دیگر فیلسوفان مسلمان بعد از فخر رازی، به‌خصوص آن دسته از فیلسوفانی که در چهارچوب مبانی پیوسته‌گرایی، نظریات خود را پرورانده‌اند، شاید بتوان نظریات و تبیین‌های نزدیک‌تری به کوزایی/ لایب‌نیتس یافت.

۳۵. کوزایی می‌خواست به‌روش افنا مسئلهٔ تربیع دایره را حل کند. در استدلال‌های وی، نمونه‌های چندی از استدلال‌های مشابه با استدلال‌های فخر رازی می‌توان یافت، مثل «زاویهٔ شاخکی». به‌اضافهٔاین‌که کوزایی نیز مانند فخر رازی متکلمی (مسیحی) باورمند به اتم‌گرایی طبیعت بود. اما آیا کوزایی به آثار فخر رازی دست‌رسی داشته است؟ پاسخ این پرسش را باید درمیان نسخه‌های ترجمه‌شدهٔ فخر رازی به عبری و لاتین یا در جای دیگر یافت.

۳۶. عدی ستیه در مقاله‌اش چهارچوبی را در نظر می‌گیرد که فخر رازی برای بررسی طبیعت داشته است. او می‌گوید که متکلمان هندسهٔ اقلیدسی را برای محاسباتی چون مکان قبله می‌پذیرفتند، ولی هندسهٔ خود آن‌ها نااقلیدسی بوده است. وی در این مقاله به بررسی و توضیح ریاضیاتی این عبارت نپرداخته است. درنتیجه چندان مشخص نیست که منظورش از هندسهٔ نااقلیدسی متکلمان چیست. اگر منظور نگاه متفاوت به هندسه و کارکرد آن است، مشکلی نیست، ولی اگر منظور او داشتن یک نظام مفهومی صورت‌بندی شده به‌عنوان علم هندسه است که بتواند مسائلی را حل کند، قطعاً اغراق‌گونه است (Setia 2006).

۳۷. در پی‌نوشت ۲۸ توضیح داده شده است.

۳۸. ترجیح می‌دهم که عبارت غیراقلیدسی را به‌جای نااقلیدسی به‌کار ببرم تا از خَلط بحث با مفهوم رایج هندسهٔ نااقلیدسی در تاریخ ریاضیات بپرهیزم.

۳۹. جدای از کارهای برجسته‌ای که ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی چون خوارزمی، خیام، و ابن‌هیثم در مباحث ریاضیات انجام داده‌اند، ازنظر مورخان تاریخ ریاضیات، اهمیت دورهٔ اسلامی به‌واسطهٔ تغییر نگرش فلسفی به مفاهیم ریاضی است. برای مثال، مسلمانان قادر شدند که اشکال هندسی و روابط حساب را هم ارز کنند و درنتیجه، شاخه‌هایی چون جبر و هندسهٔ تحلیلی در این دوره پایه‌ریزی شد (معصومی‌همدانی و سوادی ۱۳۹۳).

کتاب‌نامه

الرازی، فخرالدین (۱۹۸۷)، *المطالب العالیة من العلم الالهی*، تصحیح أحمد حجازی السّقا، بیروت: دارالکتاب العربی.

الرازی، فخرالدین (۲۰۱۷)، *إثبات جزء الذی لا یتجزا*، تصحیح و ترجمهٔ بنفشه افتخاری، لیون: دانشگاه لیون ۳ (رسالهٔ دکتری).

الرازی، فخرالدین (۱۹۹۰)، *المباحث المشرقیة فی‌العلم الهیات و الطبیعیات*، تصحیح محمد معتصم‌باللّه البغدادی، بیروت: دارالکتاب العربی.

افتخاری، بنفشه (۱۳۸۶)، *نظریهٔ جزء لا یتجزا در طبیعیات فخر رازی*، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، تهران: پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران.

معصومی همدانی، حسین و فاطمه سوادی (۱۳۹۳)، «جبر و مقابله»، *دانش‌نامهٔ جهان اسلام*، ج ۹، تهران: بنیاد دایرةالمعارف اسلامی.

معصومی همدانی، حسین (۱۳۹۲)، «متکلم و ریاضی‌دان: فخر رازی و آثار ابن هیثم»، *تاریخ علم*، دورهٔ ۱۱، ش ۱.

معصومی همدانی، حسین (۱۳۶۵)، «میان فلسفه و کلام: بحثی در آرای طبیعی فخر رازی»، *معارف*، دورهٔ ۱، ش ۷.

هیث، سرتامس لیتل (۱۳۸۱)، *تاریخ ریاضیات یونان*، ترجمهٔ احمد آرام، تهران: علمی فرهنگی.

Aristotle (2005), *Physics*, trans. Waterfield Robin (English), New York: Oxford University Press.

Bell, John L. (2006), *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Milano: Polimetrica.

Berryman Sylvia (2011), "Ancient Atomism", *Stanford encyclopedia of philosophy*, <http://plato.stanford.edu/entries/atomism-ancient>.

Coxeter, H. S. M. (1998), *Non-Euclidean Geometry*, Mathematical Association of America, Sixth Edition, Washington.

Eftekhari, Banafsheh (2017), *An Introduction to the Book "Proving Atomism"*, University of Lyon, Lyon III (Phd Thesis).

Euclid (1908), *Elements*, T. L. Heath (ed.), Cambridge: Cambridge University Press.

Heath, T. L. (1897), *The Works of Archimedes*, Cambridge: Cambridge university press.

Jorgensen, Larry M. (2009), "The Principle of Continuity and Leibniz's Theory of Consciousness", Journal of *the history of philosophy*, vol. 47, no. 2.

Pines, Shlomo (1997), *Studies in Islamic Atomism*, trans. Schwarz Michael, Jerusalem: The Magness Press.

Setia, Adi (2006), "Atomism versus Hylomorphism in the Kalam of Al-Fakhr al-Din al-Razi: A Preliminary Survey of the Matalib Al-'Aliyyah", *Islam and Science*, vol. 4, no. 2.

Rashed, Marwan (2005), "Natural Philosophy", in *The Cambridge Companion To Arabic Philosophy* , Peter Adamson and Richard C Taylor (eds.), CambridgeUniversity Press.

Studtmann Paul (2002), "The Body Problem in Aristotle", *Apeiron*, vol. 35, no. 3.

Wertz, Jr, William. F (2001), "Nicolaus of Cusa's On the Quadrature of the Circle", *Fidelio*, vol. X, no. 2.