فلسفهٔ علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
سال پنجم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹٤، ۱٤۳ – ۱٦۱

صوری‌سازی مکانیک لاگرانژی و ناوردایی معادلات لاگرانژ

ابوتراب یغمائی*

چکیده

بر اساس دیدگاه تجربه‌گرایان منطقی، که به دیدگاه مورد قبول شهرت دارد، نظریهٔ علمی مجموعه‌ای از گزاره‌هاست که در منطق مرتبهٔ اول صورت‌بندی می‌شوند. مطابق با دیدگاه رقیب که با نام دیدگاه معنایی یا غیرگزاره‌ای شناخته می‌شود، نظریهٔ علمی مجموعه‌ای از مدل‌هاست. در این مقاله سعی می‌شود نشان داده شود که دیدگاه مورد قبول نمی‌تواند الگوی قابل قبولی از تعین نیروهای تعمیم‌یافته در مکانیک کلاسیک ارائه کند. بر این اساس در قسمت دوم، از ناوردایی معادلات لاگرانژ و استلزامات آن بحث می‌شود. در آخر این بخش این نکته مورد تأکید قرار می‌گیرد که ناوردایی معادلات لاگرانژ مستلزم این است که مقادیر فیزیکی هم‌جنس هم‌بُعد نباشند. در بخش سوم، آخرین نسخهٔ دیدگاه مورد قبول معرفی می‌شود. سپس صوری‌سازی مکانیک لاگرانژی در این دیدگاه ارزیابی و مشاهده می‌شود که این دیدگاه نمی‌تواند مقادیر فیزیکی هم‌جنس را به صورت یک‌سان متعین کند. در بخش آخر، دیدگاهِ معناییِ سوپیز ـ اسنید معرفی می‌شود و نسخهٔ ساختاری مکانیک لاگرانژی مطرح خواهد شد. درنهایت نشان داده می‌شود که این دیدگاه می‌تواند مقادیر فیزیکی هم‌جنس را به صورت یک‌سان متعین کند.

کلیدواژه‌ها: دیدگاه مورد قبول، دیدگاه معنایی، ساختارگرایی، ناوردایی معادلات لاگرانژ.

۱. مقدمه

اگرچه معمولاً فلسفهٔ علم استاندارد با معیارهایش در باب جدایی علم از غیرعلم شناخته شده است، اما پیش‌گامان فلسفهٔ علم در اوایل قرن بیستم همواره به این می‌اندیشیدند که

* استادیار پژوهشکدهٔ مطالعات بنیادین علم و فناوری، دانشگاه شهید بهشتی a_yaghmaie@sbu.ac.ir
تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/٤/۲۰، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۷/۱٦

«نظریهٔ علمی چیست؟».[1] موفقیت‌های روزافزون منطق مرتبهٔ اول کافی بود تا فلاسفه را به سمت استفاده از این منطق برای صوری‌سازی نظریه‌های علمی سوق دهد. حاصل آن شد که تجربه‌گرایان منطقی نظریهٔ علمی را چیزی ندانند جز مجموعه‌ای از گزاره‌ها که درنهایت توسط نتایج مشاهدتی و عملیات مشاهدتی تعبیر می‌شود. این دیدگاه که به دیدگاه مورد قبول (recived view) معروف است، توانست تا اواخر دههٔ ۱۹۵۰ میلادی بر پا باشد. اما انتقادات قاطع هانسون (Hanson, 1958) و کوهن (Kuhn, 1962) در فرو ریختن تمایز مشاهده/ نظریه و انتقاد پاتنم (Putnam, 1966) به تمایز میان واژگان مشاهدتی/ نظری ضربه‌ای جدی به این دیدگاه وارد کرد. هم‌زمان با انتقادات کوهن و حتی پیش از آن، گروهی از فلاسفهٔ علم مانند سوپیز (Suppes, 1957) و بث (Beth, 1949) نشان داده بودند که منطق مرتبهٔ اول نمی‌تواند نظریه‌های علمی را بازسازی کند. دیدگاه آنان بعدها به دیدگاه معنایی (semantic approach)، ساختارگرایانه (structuralist view)، غیرگزاره‌ای (non-statement view) و یا فرازبانی (extra-linguistic view) مشهور شد. اگرچه ادبیات غالب فلسفهٔ علم در دهه‌های ۱۹٦۰ و ۱۹۷۰ تحت تأثیر فلسفهٔ علم کوهن و فایرابند قرار داشت، ساختارگرایان در پایان این دوران برنامه‌های بازسازی عقلانی نظریه‌های علمی را احیا کردند. آثار ون فراسن (Van Fraassen, 1970 and 1980)، اسنید (Sneed, 1979) و اشتگمولر (Stegmuller, 1976) از جملهٔ این برنامه‌ها محسوب می‌شوند.

در این مقاله سعی می‌شود جدا از جزئیات دیدگاه معنایی و موارد اختلاف کلی آن با دیدگاه مورد قبول، موردی از مکانیک کلاسیک بررسی و درنهایت نتیجه گرفته شود که دیدگاه مورد قبول نمی‌تواند الگویی مورد قبول در رابطه با تعین (identification) مفاهیم فیزیکی، خصوصاً نیروهای تعمیم‌یافته، ارائه کند. بر این اساس، در قسمت دوم از ناوردایی معادلات لاگرانژ و استلزامات آن بحث می‌شود. در آخر این بخش این نکته مورد تأکید قرار می‌گیرد که ناوردایی معادلات لاگرانژ مستلزم این است که مقادیر فیزیکی (physical magnitudes) هم‌جنس هم‌بُعد نباشند.

در بخش سوم، آخرین نسخهٔ دیدگاه مورد قبول معرفی می‌شود. سپس صوری‌سازی مکانیک لاگرانژی در این دیدگاه ارزیابی می‌شود و مشاهده می‌شود که این دیدگاه نمی‌تواند مقادیر فیزیکی هم‌جنس را به صورت یک‌سان متعین کند.

در بخش آخر، دیدگاهِ معناییِ سوپیز ـ اسنید (Suppes-Sneedean approach) معرفی می‌شود و نسخهٔ ساختاری مکانیکِ لاگرانژی مطرح خواهد شد. درنهایت نشان داده می‌شود که این دیدگاه می‌تواند مقادیر فیزیکی هم‌جنس را به صورت یک‌سان متعین کند.

۲. استلزامات فیزیکیِ ناوردایی معادلهٔ لاگرانژ

معمولاً کتاب‌های درسی فیزیک صورت‌بندی‌های متفاوت مکانیک کلاسیک، یعنی صورت‌بندی نیوتن، لاگرانژ، و هامیلتون را هم‌ارز یا معادل هم می‌دانند. این‌که صورت‌بندی‌های مذکور، در صورت بازسازی در دستگاه‌های صوری‌سازی فلسفی معادل هستند یا خیر، موضوع این مقاله نخواهد بود و در این‌جا صرفاً به شهود اولیه‌ای پرداخته خواهد شد که فیزیک‌دانان از هم‌ارزی این دستگاه‌ها مد نظر قرار می‌دهند.[۲] اگرچه معنای دقیق هم‌ارزبودن توسط کتاب‌های درسی بیان نمی‌شود، اما می‌توان حدس زد که منظور از هم‌ارزی این است که اولاً معادلات مزبور دامنهٔ تبیینی یک‌سانی دارند و ثانیاً می‌توان با روابط خاصی (روابط تبدیل) برخی از واژگان آن‌ها را به نحوی به هم مربوط کرد که مجموعهٔ معادلات هر یک از دیگری مشتق شود. برای نمونه سایمون (Symon) می‌نویسد: «چون معادلات لاگرانژ از معادلات نیوتن به دست آمده‌اند به منزلهٔ یک نظریهٔ جدید فیزیکی نیستند بلکه تنها روش دیگر ولی معادلی برای بیان همان قوانین حرکت‌اند» (سایمون، ۱۳۸۰: ۲۹۲).

در این بخش به موضوع هم‌ارزی نظریه‌های فیزیکی نخواهم پرداخت، اما این موضوع را مورد بحث قرار می‌دهم که هم‌ارز دانستن صورت‌بندی‌های متفاوت یک نظریه تبعاتی دارد که کتاب‌های درسی معمولاً از آن‌ها غفلت می‌کنند. در این نوشته به صورت مشخص استخراج معادلات لاگرانژ از قوانین حرکت نیوتن مطرح خواهد شد. اما پیش از پرداختن به این موضوع، اصل ناگفته‌ای منقح می‌شود که در هم‌ارز دانستن صورت‌بندی‌های متفاوت نقش اساسی ایفا می‌کند.

صورت‌بندی F با مجموعهٔ معادلات E را در نظر بگیرید. یکی از قیودی که یک فیزیک‌دان به صورت ضمنی بر روی معادلات E می‌گذارد تا این معادلات قوانین جهان‌شمولی محسوب شوند این است که با تبدیل دستگاه مختصات[۳] شکل معادلات E تغییر نکند یا اصطلاحاً ناوردا باقی بماند. حال صورت‌بندی دیگر 'F با معادلات 'E را در نظر بگیرید؛ برای این‌که صورت‌بندی F معادل یا هم‌ارز صورت‌بندی 'F باشد باید دو شرط وجود داشته باشد: ۱. روابط تبدیل T به نحوی وجود داشته باشند که بتوان E و 'E را به هم مربوط کرد؛ ۲. این روابط تبدیل چنان باشند که معادلات 'E با تغییر دستگاه‌های مختصات ناوردا باقی بمانند (هم‌چنان که معادلات E ناوردا باقی می‌ماندند).

برای نمونه معادلات لاگرانژ هم‌ارز معادلات نیوتن هستند؛ چراکه مجموعهٔ روابط تبدیل T چنان وجود دارند که اولاً می‌توان توسط تعدادی از آن‌ها معادلات لاگرانژ را از

قوانین نیوتن استخراج کرد، و ثانیاً می‌توان توسط سایر روابط تبدیل ناوردایی معـادلات لاگرانژ را نتیجه گرفت. بنـابراین تعـدادی از گـزاره‌هـای متعلـق بـه روابـط تبـدیل در استخراج معادلات لاگرانژ از معادلات نیوتن نقش دارند و مابقی در ناوردایی معـادلات لاگرانژ دخالت دارند. حال پرسش اساسی این است: روابط تبدیل میان دو صورت‌بندی متفاوت ولی هم‌ارز، چه قیودی را تحمیل می‌کنند؟ در این بخش نشـان داده خواهـد شـد که روابط تبدیل میان قوانین نیوتن و معادلات لاگرانژ، تغییر در بُعد (dimension) مقـادیر فیزیکی‌ای (physical magnitude) که از نظر فیزیک‌دان هم‌جنس هستند نتیجه می‌دهد.

اما قبل از هر چیز باید معیار هم‌جنس بودن دو مقدار فیزیکی را مشخص کرد. قانون یـا معادلهٔ L را فرض کنید که در آن مقدار فیزیکی M حضور دارد. همان‌طور که اشاره شد، بـا تبدیل دستگاه مختصات معادلهٔ L باید ناوردا باقی بماند. بنابراین جایگاهی در تبدیل یافتهٔ L یعنی 'L وجود دارد که متناظر M یعنی 'M آن جایگاه را پر می‌کند. در این صورت می‌گوییم که M و 'M هم‌جنس هستند. برای مثال نیروهای تعمیم‌یافته اگرچـه دارای بُعـد یـک‌سـان نیستند، ولی هم‌جنس هستند؛ چراکه در معادلات لاگرانـژ نقـش ضـمنی[٤] یـک‌سـانی ایفـا می‌کنند. هدف این مقاله این است که نشان دهد دیدگاه مورد قبول نمی‌تواند معیاری بـرای هم‌جنس بودن مقادیر فیزیکی ارائه دهد. از طرف دیگر، دیدگاه معنایی سوپیز ـ اسنید چنین هدفی را ارضا می‌کند.

اکنون به استخراج معادلهٔ لاگرانژ از معادلهٔ نیـوتن مـی‌پـردازیم (Johns, 2005). سیسـتم N ذره‌ای را فرض کنید که مختصـات ذرهٔ n– ام آن $\vec{r}_n = x_{n1}\hat{e}_1 + x_{n2}\hat{e}_2 + x_{n3}\hat{e}_3$ اسـت. به جای به کار گرفتن نوشتار برداری برای مختصات N ذره، مؤلفـه‌هـای بردارهـای مکـان N ذره را به صورت یک دنباله می‌نویسیم:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots\ldots, x_{N3} \qquad (1)$$

حال قرار می‌دهیم:

$$s_1 = x_{11}, s_2 = x_{12}, \ldots\ldots\ldots, s_D = x_{N3} \qquad (2)$$

که $D = 3N$. اگر نیـروی وارد بـر ذرهٔ n– ام نیـز $\vec{f}_n = f_{n1}\hat{e}_1 + f_{n2}\hat{e}_2 + f_{n3}\hat{e}_3$ باشـد، قرار می‌دهیم:

$$F_1 = f_{11}, F_2 = f_{12}, \ldots\ldots\ldots, F_D = f_{N3} \qquad (3)$$

و برای جرم‌ها:

$$M_1 = m_1, M_2 = m_1, \ldots\ldots\ldots, M_D = m_N \qquad (4)$$

دستگاه مختصات s را دستگاه مختصات تعمیم‌یافتهٔ s می‌نامیم. معادلهٔ نیوتن برای ذرهٔ i– ام به صورت:

$$F_i = \frac{dP_i}{dt} \qquad (5)$$

است، که P_i تکانهٔ تعمیم‌یافتهٔ ذرهٔ i– ام است. انرژی جنبشی تعمیم‌یافتهٔ کل سیستم نیز برابر $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D} M_i \dot{s}_i^2$ است.

اگر نیروهای وارد بر سیستم متشکل از نیروهای پایستار و ناپایستار باشد، خواهیم داشت: $\vec{f}_n = -\nabla_n U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N) + \vec{f}_n^{NP}$ که در مختصات تعمیم‌یافتهٔ S چنین است:

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial s_i} U(s_1,...,s_D) + F_i^{NP} \qquad (6)$$

بنابراین قانون دوم نیوتن در مختصات تعمیم‌یافتهٔ S به صورت ذیل خواهد بود:

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial s_i} U(s_1,...,s_D) + F_i^{NP} \qquad (7)$$

حال اگر تابع لاگرانژی $L(s,\dot{s},t)$ را به صورت $L(s,\dot{s},t) = T(\dot{s}) - U(s,t)$ تعریف کنیم خواهیم داشت:

$$L(s,\dot{s},t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D} M_i \dot{s}_i^2 - U(s_1,...,s_d,t) \qquad (8)$$

از طرفی $\frac{\partial L}{\partial s_i} = -\frac{\partial}{\partial s_i} U(s_i,...,s_D,t)$ و $\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} = M_i \dot{s}_i = P_i$.

بنابراین صورت تبدیل‌یافتهٔ قانون دوم نیوتن یا معادلهٔ ۷ برابر است با:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_i} = F_i^{NP} \qquad (9)$$

معادلهٔ (۹) را معادلهٔ لاگرانژ در مختصات تعمیم‌یافتهٔ s می‌نامیم. درواقع تا به این‌جا دو صورت‌بندی ارائه شده است:

صورت‌بندی الف:

واژگان: ۱. مختصات مکانی: x_{ij}، ۲. نیرو: $\vec{f}_n$، ۳. پتانسیل: $U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)$، ٤. تکانه: p_n، ۵. انرژی جنبشی: t و ...

معادله یا قانون اساسی (قانون دوم نیوتن): $\frac{dp_n}{dt} = -\nabla_n U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N) + \vec{f}_n^{NP}$

صورت‌بندی ب:

واژگان: مختصات تعمیم یافته: s، ۲. نیروی تعمیم‌یافته: F_i، ۳. پتانسـیل: $U(s_i,....,s_D,t)$، ٤. تکانهٔ تعمیم‌یافته: P_i، ۵. انرژی جنبشی تعمیم‌یافته: T، و ...

معادله یا قانون اساسی (معادلهٔ لاگرانژ):

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}) - \frac{\partial L}{\partial s_i} = F_i^{NP}$$

اگرچه دو صورت‌بندی مطرح شده‌اند، ولـی هـر دو در یـک دسـتگاه مختصـات بیـان شده‌اند؛ چراکه در مورد دستگاه‌ها این‌همانی $x_{ij} = s_i$ برقرار بـود. بـرای اشـتقاق معادلـهٔ لاگرانژ از معادلـهٔ نیـوتن نیـز از روابـط تبـدیل (۲)، (۳)، (٤) و $L(s,\dot{s},t) = T(\dot{s}) - U(s,t)$ استفاده شد، که سه رابطهٔ تبدیل اول روابط این‌همانی بودند. درنتیجه تا به ایـن‌جـا بـا تغییـر صورت‌بندی، ابعادِ مقادیر فیزیکی‌ای که واژگان دو صورت‌بندی به آن‌هـا دلالـت مـی‌کننـد، تغییری نکرده‌اند. البته توجه داریم که دو صورت‌بندی در یک دستگاه مختصات بیان شده‌اند.

اما هنوز نمی‌توانیم ادعا کنیم که صورت‌بندی الف با صورت‌بنـدی ب هـم‌ارز اسـت. چراکه هنوز ناوردایی معادلات لاگرانژ با تغییر دستگاه مختصـات تعمـیم‌یافتـه نشـان داده نشده است. برای نشان دادن این ناوردایی باید صورت کلـی روابـط تبـدیل را بـه دسـت آوریم. روابط تبدیل پیشین تنها در مواردی برقرارند که دو صورت‌بندی در یـک دسـتگاه مختصات بیان شوند.

برای گذار از مختصات تعمیم‌یافتهٔ s، مختصات تعمیم‌یافتـهٔ q را در نظـر بگیریـد کـه تعـداد درجـات آزادی آن نیـز هماننـد s، D اسـت. فـرض مـی‌کنـیم کـه s_i تـابعی از $q_1, q_2,..., q_D$ است. اگر دترمینان ماتریس ژاکوبی تبدیل s به q کـه مؤلفـهٔ ik-ام آن بـه صورت $(J_{s\to q})_{ik} = \frac{\partial s_i(q,t)}{\partial q_k}$ است، مخالف صفر باشـد مـی‌تـوان q_kهـا را بـر حسب s_iها نوشت.

نیروهای تعمیم‌یافته در مختصات تعمیم‌یافتهٔ q را نیز باید به نیـروهـای تعمـیم‌یافتـه در مختصات s مربوط کنیم. این ارتباط به وسیلهٔ رابطهٔ تبدیل ذیل صورت می‌گیرد:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{D} F_i \frac{\partial s_i(q,t)}{\partial q_k} \qquad (۱۰)$$

که Q_k نیروی k- ام در مختصات تعمیم‌یافتهٔ q است (اگر مختصات تعمیم‌یافتهٔ q همان مختصات مکانی x_{ij} باشد، رابطهٔ ۱۰ به رابطهٔ این‌همانی ۳ می‌انجامد. بنابراین رابطهٔ تبدیل ۳ حالت خاصِ رابطهٔ تبدیل ۱۰ است). اما چه ضرورتی دارد که میان نیروهای تعمیم‌یافته در دو دستگاه مختصات چنین ارتباطی برقرار کنیم؟ در سطرهای آینده درخواهیم یافت که رابطهٔ ۱۰ شرط لازم برای ناوردایی معادلات لاگرانژ است.

اکنون باید نسبت تابع پتانسیل را با این نیروی تعمیم‌یافتهٔ جدید به دست آوریم. اگر در رابطهٔ ۱۰ به جای F_i، معادلش را از رابطهٔ ٦ جانشین کنیم، خواهیم داشت:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{D}[-\frac{\partial}{\partial s_i}U(s,t) + F_i^{NP}]\frac{\partial s_i(q,t)}{\partial q_k} = \qquad (۱۱)$$
$$-\sum_{i=1}^{D}\frac{\partial}{\partial s_i}U(s,t)\frac{\partial s_i(q,t)}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{D}F_i\frac{\partial s_i(q,t)}{\partial q_k}$$

اکنون اگر فرض کنیم تابع پتانسیل در مختصات تعمیم‌یافتهٔ s و q بر یک مقدار فیزیکی دلالت می‌کند[5]، می‌توانیم مشتق جزئی آن را به صورت ذیل بنویسیم:

$$U = U(s,t) = U(q,t) = U(s_1(q,t),...,s_D(q,t),t) \Rightarrow \qquad (۱۲)$$
$$\frac{\partial}{\partial q_k}U(q,t) = \sum_{i=1}^{D}\frac{\partial}{\partial s_i}U(s,t)\frac{\partial}{\partial q_k}s_i(q,t)$$

اگر فرض کنیم روابط تبدیل میان نیروهای تعمیم‌یافتهٔ ناپایستار F_i^{NP} و Q_k^{NP} نیز همانند روابط تبدیل میان نیروهای تعمیم‌یافتهٔ پایستار است، یعنی مطابق رابطهٔ ۱۰، با توجه به رابطهٔ ۱۲، رابطهٔ ۱۱ منجر خواهد شد به:

$$Q_k = -\frac{\partial}{\partial q_k}U(q,t) + Q_k^{NP} \qquad (۱۳)$$

که مشابه رابطهٔ ٦ است. بنابراین تا به این‌جا در مورد روابط تبدیل سه فرض مهم کرده‌ایم:

۱. روابط تبدیل میان نیروهای تعمیم‌یافته مطابق رابطهٔ ۱۰ است؛

۲. رابطهٔ تبدیل میان توابع پتانسیل از نوع رابطهٔ این‌همانی است؛

۳. نیروهای تعمیم‌یافتهٔ ناپایستار همانند نیروهای تعمیم‌یافتهٔ پایستار مطابق رابطهٔ ۱۰ تبدیل می‌شوند.

این سه فرض به علاوهٔ این فرض مهم که لاگرانژی (همانند تابع پتانسیل) با تبدیل مختصات تغییری نمی‌کند، برای اثبات ناوردایی معادلات لاگرانژ تحت تبدیلات مختصات تعمیم‌یافته کافی هستند (ibid: 32):

قضیهٔ ناوردایی معادلات لاگرانژ: معادلات لاگرانژ در مختصات تعمیم‌یافتهٔ s،

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i})-\frac{\partial L}{\partial s_i}=F_i^{NP}$$

برای $i=1,2,...,D$ برقرارند اگر و تنها اگر معادلات لاگرانژ در مختصات تعمیم‌یافتهٔ q،

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k})-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k^{NP}$$

برای $k=1,2,...,D$ برقرار باشند.

بنابراین در کلی‌ترین حالت دو صورت‌بندی در دو دستگاه مختصات مختلف داریم: ۱. صورت‌بندی نیوتن در دستگاه مختصات تعمیم‌یافتهٔ s و ۲. صورت‌بندی لاگرانژ در مختصات تعمیم‌یافتهٔ q. روابط تبدیل میان این دو صورت‌بندی عبارت‌اند از:

$$1)\,q_k=q_k(s_1,...,s_D,t)$$

$$2)\,Q_k=\sum_{i=1}^{D}F_i\frac{\partial s_i(q,t)}{\partial q_k}$$

$$3)\,Q_k^{NP}=\sum_{i=1}^{D}F_i^{NP}\frac{\partial s_i(q,t)}{\partial q_k} \qquad (۱٤)$$

$$4)\,U(q_1,...,q_D,t)=U(s_1,...,s_D,t)$$

$$5)\,L(q_1,...,q_D,t)=L(s_1,...,s_D,t)$$

دو رابطهٔ تبدیل اول از ۱٤ دو نتیجهٔ مهم در مورد بُعد مقادیر فیزیکی q_k و Q_k دارد: ۱. لزومی ندارد که q_kها با s_iها هم‌بُعد باشند (q_kها حتی می‌توانند بُعد فیزیکی نداشته باشند)؛ ۲. لزومی ندارد که Q_kها با F_iها هم‌بُعد باشند. در بخش بعدی خواهیم دید که منطق مرتبهٔ اول، که رکن اساسی دیدگاه مورد قبول است، نمی‌تواند هم‌جنس بودن دو مقدار فیزیکی با بُعد فیزیکی مختلف را توضیح دهد.

۳. دیدگاه مورد قبول و ناوردایی معادلات لاگرانژ

در بخش پیشین صورت‌بندی نامنقحی از مکانیک لاگرانژی ارائه شد. این‌که چگونه مکانیک لاگرانژی مطابق دیدگاه مورد قبول صورت‌بندی می‌شود موضوع این بخش است. گفتنی است که ساختار منطقی این نوع صورت‌بندی از مکانیک کلاسیک به صورت کامل ذکر

نخواهد شد و به بخش‌هایی از آن اکتفا می‌شود؛ بخش‌هایی که برای نشان دادن ناکارآمدی منطق مرتبهٔ اول و به بیان دیگر ناکارآمدی دیدگاه مورد قبول کفایت می‌کنند.

طبق آخرین اصلاحات دیدگاه مورد قبول، نظریه‌های علمی را می‌توان بر اساس ساختار ذیل صورت‌بندی کرد (Suppe, 1974: 50-51):

۱. زبان مرتبهٔ اول L متشکل از واژگان غیرمنطقی مشاهدتی Vo و نظری VT وجود دارد که نظریهٔ علمی بر اساس آن و حساب منطقی K تعریف‌شده بر روی L صورت‌بندی می‌شود؛

۲. زیرزبان مشاهدتی Lo با واژگان مشاهدتی Vo و زیرحساب Ko وجود دارد. زیرزبان نظری LT نیز با واژگان نظری VT و زیرحساب KT وجود دارد؛

۳. زبان L علاوه بر جملات حاوی واژگان فقط نظری و جملات حاوی واژگان فقط مشاهدتی، دارای جملات ترکیبی است که شامل دو نوع واژگان مشاهدتی و نظری است؛

٤. زیرزبان مشاهدتی Lo دارای تعبیر $< O, f_j, R_i >$ است که دامنهٔ O شامل رخدادهای مشاهدتی انضمامی، اشیا و عملیات‌های جزئی آزمایشگاهی است. بنابراین روابط $R_i (i \in I)$ و توابع $f_j (j \in J)$ نیز مشاهدتی هستند؛

٥. زیرزبان نظری LT توسط دو دسته اصل تعبیر جزئی پیدا می‌کند: الف) اصول موضوعهٔ نظریه که با T نمایش می‌دهیم و صرفاً شامل واژگان نظریه‌اند؛ و ب) قواعد تطابقی C که شامل جملات ترکیبی‌اند؛

٦. نظریهٔ علمیِ مبتنی بر L، T و C عبارت است از عطف T و C که با TC نمایش می‌دهیم.

برای صورت‌بندی مکانیک لاگرانژی قبل از هر چیز عمل‌گرهای ریاضی مانند تساوی، مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری و ... را به زبان منطقی L اضافه می‌کنیم. اکنون باید زیرزبان مشاهدتی و نظری را معین کنیم. همان‌طور که قبلاً گفته شد، فقط آن واژگان و تعابیری که برای رسیدن به هدف‌مان لازم هستند معرفی می‌شوند.

دامنهٔ تعبیر $< O, f_j, R_i >$ از زیرزبان مشاهدتی شامل ذرات نقطه‌ای و بازه‌هایی از اعداد حقیقی است که زمان و مقادیر توابع مشاهدتی را بازنمایی می‌کنند. توابع مشاهدتی f_j عبارت‌اند از تابع مکان تعمیم‌یافته و تابع جرم. تابع جرم را می‌توان با عملیات مشاهدتی مشخصی تعریف کرد (Margenaue and Lindsay, 1954: 91-94)، بدین جهت جزو توابع

مشاهدتی محسوب شده است. نکتهٔ شایان ذکر این است که چون بیش از یک مختصات تعمیم‌یافته در اختیار داریم، بیش از یک تابع مکان تعمیم‌یافته باید در نظر بگیریم. روابط میان توابع مکان تعمیم‌یافته به وسیلهٔ برخی از روابط R_i بازنمایی می‌شوند.

بر اساس ساختار منطقی معرفی‌شده، می‌توان معنای واژگان مشاهدتی وارد در نظریه را متعین کرد: معنای واژهٔ «جرم» عبارت است از تابع $f_1 = m$، معنای واژهٔ «مکان تعمیم‌یافتهٔ s» عبارت است از تابع $f_2 = s$ و معنای واژهٔ «مکان تعمیم‌یافتهٔ q» عبارت است از تابع $f_3 = q$. اما در منطق مرتبهٔ اول به همان اندازه که توابع جرم m و مکان تعمیم‌یافتهٔ s نامربوط هستند، توابع مکان تعمیم‌یافتهٔ s و q نیز نامربوط‌اند. این از شهود فیزیکی بسیار بعید است. فیزیک‌دان گویی توابع مکان تعمیم‌یافته را از یک جنس می‌داند. به نظر وی واژگان «مکان تعمیم‌یافتهٔ s» و «مکان تعمیم‌یافتهٔ q» بر یک موجودیت یا مفهوم فیزیکی دلالت می‌کنند، در حالی که واژهٔ «جرم» به مفهوم دیگری ارجاع می‌دهد. شایان ذکر است که مشکلِ مذکور در مورد تابع جرم اتفاق نمی‌افتد؛ چراکه با تغییر مختصات تعمیم‌یافته، واژهٔ «جرم» دلالتش ثابت باقی می‌ماند. به عبارت دیگر معنای واژهٔ «جرم» در هر مختصات تعمیم‌یافته‌ای تابع جرم m است.

اما مدافع دیدگاه مورد قبول می‌تواند پاسخ دهد که توابع مکان تعمیم‌یافتهٔ s و q با رابطهٔ $R_1(s,q) = 0$ به هم مربوط می‌شوند. بنابراین نمی‌توان آن‌ها را به لحاظ معناشناختی کاملاً از هم جدا دانست. این نوع دفاع از دیدگاه مورد قبول به نظر دو مشکل دارد؛ اول آن‌که رابطهٔ R_1 می‌تواند به نحوی باشد که بر اساس آن بُعد s و q یک‌سان نشود. بنابراین روش عملیاتی اندازه‌گیری آن‌ها، و در نتیجه معنای آن‌ها متفاوت خواهد بود (اگر آن‌ها هم‌بُعد بودند می‌توانستیم ادعا کنیم که علی‌الاصول روش عملیاتی یک‌سانی برای اندازه‌گیری آن‌ها وجود دارد).

دومین مشکل این است که توابع مختلف می‌توانند با یک رابطه به هم مربوط شوند. برای مثال در اجسام با جرم متغیر، مثل موشک، تابع جرم با تابع مکان تعمیم‌یافته رابطه پیدا می‌کند. اما وجود چنین رابطه‌ای مستلزم آن نیست که این دو تابع اشتراک معنایی دارند.

تا به حال معناداری واژگان نظری مکانیک لاگرانژی به صورت مشخص بحث و ارزیابی نشده است. تمامی ایرادهای وارده را می‌توانستیم به ساختار منطقی مکانیک نیوتنی نیز وارد کنیم؛ یعنی ساختار منطقی مکانیک نیوتنی بر اساس دیدگاه مورد قبول. به عبارت دیگر مدافع دیدگاه مورد قبول می‌تواند ادعا کند که با تغییر مختصات تعمیم‌یافته در مکانیک نیوتنی نیز معنای واژهٔ «مکان تعمیم‌یافته» تغییر می‌کند. بنابراین اگر بنا باشد دیدگاه مورد

قبول ناکارآمد باشد، این ناکارآمدی را مکانیک نیوتنی نیز می‌تواند نمایان کند. اما انحراف مکانیک لاگرانژی از مکانیک نیوتنی در مورد واژگان نظری اتفاق می‌افتد. پیش از پرداختن به این انحراف، کمی از واژگان نظری مکانیک لاگرانژی صحبت می‌کنیم.

به غیر از واژگان مشاهدتی ذکرشده، سایر واژگان به کار گرفته‌شده در مکانیک لاگرانژی واژگان نظری‌اند. واژگانی مانند «نیروی تعمیم‌یافته»، «انرژی جنبشی تعمیم‌یافته»، «سرعت تعمیم‌یافته»، «پتانسیل»، «تکانهٔ تعمیم‌یافته» و «لاگرانژی». آن‌چه برای منظور ما اهمیت دارد واژهٔ نظری «نیروی تعمیم‌یافته» است. در مختصات تعمیم‌یافتهٔ s واژهٔ «نیروی تعمیم‌یافتهٔ F_i» بر اساس یک دسته واژگان نظری و یک دسته واژگان مشاهدتی تعبیر پیدا می‌کند. واژهٔ مشاهدتی «جرم» است که خود بر اساس تابع مشاهدتی جرم m معنادار می‌شود. واژهٔ نظری واژهٔ «شتاب» است که خود بر اساس تابع مکان تعمیم‌یافتهٔ s و زمان تعبیر پیدا می‌کند. اما در مختصات تعمیم‌یافتهٔ q، واژهٔ «نیروی تعمیم‌یافتهٔ Q_k» بر اساس تابع مکان تعمیم‌یافتهٔ q و تابع جرم m معنای تجربی پیدا نمی‌کند، بلکه توسط تابع نیروی تعمیم‌یافتهٔ F_i و $\frac{\partial s_i(q,t)}{\partial q_k}$، و بر اساس رابطهٔ ۱۰ معنادار می‌شود.[۶] نکتهٔ مهم این است که رابطهٔ ۱۰ بُعد توابع Q_k و F_i را یک‌سان باقی نمی‌گذارد. بنابراین به صورت علی‌الاصول روش آزمایشگاهی یک‌سانی وجود ندارد که توسط آن «نیروی تعمیم‌یافتهٔ F_i» و «نیروی تعمیم‌یافتهٔ Q_k» تعبیر تجربی یک‌سانی پیدا کنند. این دقیقاً همان مشکلی است که در مورد واژگان مشاهدتی «مکان تعمیم‌یافتهٔ s» و «مکان تعمیم‌یافتهٔ q» با آن مواجه بودیم. با این اختلاف که اولی در سطح زیرزبان مشاهدتی اتفاق می‌افتد، در حالی که دومی در سطح زیرزبان نظری روی می‌دهد.

در سطور پیشین، از این نکته یاد کردیم که مشکل معناشناختی در مورد زیرزبان مشاهدتی صرفاً در مورد مکانیک لاگرانژی رخ نمی‌دهد و مکانیک نیوتنی نیز با آن دست به گریبان است. اما نقطهٔ افتراق مکانیک لاگرانژی از مکانیک نیوتنی در این نکته است که زیرزبان نظری مکانیک نیوتنی مشکل معناشناختی‌ای از این بابت ندارد. چراکه واژهٔ «نیرو» در مکانیک نیوتنی در تمامی دستگاه‌های مختصات بر یک تابع دلالت می‌کند. در نتیجه بُعد این تابع نیز در تمامی دستگاه‌های مختصات یک‌سان و برابر $\frac{ML}{T^2}$ است. بنابراین، این صوری‌سازی مکانیک لاگرانژی است که ناکارآمدی دیدگاه مورد قبول را نمایان می‌کند.

قبل از آن‌که این بخش را به پایان برسانیم، ذکر چند نکته ضروری به نظر می‌رسد؛ اول آن‌که، اگرچه در مکانیک لاگرانژی نیروها و مکان‌های تعمیم‌یافته لزوماً هم‌بُعد نیستند، اما مقادیر فیزیکی دیگری هستند که همواره بُعدشان ثابت است. برای مثال بُعد $F_i s_i$ و $Q_k q_k$

همواره ثابت و برابر $\frac{ML^2}{T^2}$ است. یا بُعد $p_i s_i$ و $P_k q_k$ (کـه p_i تکانـه در مختصـات s و P_k تکانه در مختصات q است) همواره برابر $\frac{ML^2}{T}$ است.

نکتهٔ شایان ذکر دیگر شیوه‌هایی است که معادلات لاگرانژ از آن‌ها استنتاج می‌شوند. بـه صورت کلی برای رسیدن به معادلات لاگرانژ سه روش وجود دارد: ۱. قـانون دوم نیـوتن؛ ۲. اصل دالامبـر؛ و ۳. اصـل کـم‌تـرین کـنش. ناکارآمـدی دیـدگاه مـورد قبـول در مـورد صوری‌سازی مکانیک لاگرانژی تنها زمانی معتبر است که شیوهٔ نخست انتخاب شود. بـرای مثال ناوردایی معادلات لاگرانژ نتیجهٔ بدیهی اصل کـم‌تـرین کـنش اسـت. همـان‌طـور کـه می‌دانیم، مسیری برای کنش مسیر مانا (stationary) است که معادلات لاگرانژ را ارضا کنـد. از طرفی می‌دانیم هر مسیری را می‌توانیم به طرق گوناگون بازنمایی کنیم. بنابراین معـادلات لاگرانژ ضرورتاً باید در هر بازنماییِ مکانیِ مسیر مانا ارضـا شـوند و ایـن یعنـی نـاوردایی معادلات لاگرانژ. اما هـدف اولیـه بررسـی اسـتلزامات هـم‌ارز دانسـتن مکانیـک نیـوتنی و لاگرانژی بود، نه اصل کم‌ترین کنش و معادلات لاگرانـژ. در بخـش بعـدی یکـی دیگـر از شیوه‌های صوری‌سازی نظریه‌های علمی، یعنی دیدگاه سوپیز ـ اسنید و رابطهٔ آن با مکانیک لاگرانژی مورد واکاوی قرار می‌گیرند.

۴. دیدگاه سوپیز ـ اسنید و ناوردایی معادلات لاگرانژ

همان‌طور که قـبلاً اشـاره شـد رهیافـت سـاختارگرایانهٔ سـوپیز ـ اسـنید بـه همـراه سـایر رویکردهای معنـایی (Van Fraassen, 1970)، (Suppe, 1967-mentioned in Suppe, 1970) بدیل‌های دیدگاه مورد قبول هستند. در این بخش ساختار مکانیک لاگرانـژی و ارتبـاط آن با ساختار مکانیک کلاسیک ذره‌ای معرفـی مـی‌شـود (Sneed, 1979). درنهایـت بـه مزیت این دیدگاه در مقایسه با دیدگاه مورد قبول در رابطه با ناوردایی معادلات لاگرانژ پرداخته می‌شود.

در رابطه با مکانیک نیوتنی سـه سـطح از الگوهـا (models) وجـود دارد: ۱. مجموعـهٔ الگوها از ساختاری که در آن توابع نظریه‌ای[۷] تعریف نمی‌شوند (در مکانیک نیـوتنی یگانـه تابعی که اندازه‌گیری آن به نظریه بستگی ندارد، یعنی یگانه تابع غیرنظریه‌ای، مکان اسـت)؛ ۲. مجموعهٔ الگوها از ساختاری که در آن توابع نظریـه‌ای تعریـف مـی‌شـوند؛ ۳. مجموعـهٔ الگوها از ساختاری که در آن رابطهٔ میان توابع نظریه‌ای تعریف می‌شود. در مـورد مکانیـک کلاسیک ساختار اول را سینماتیک ذره‌ای PK، ساختار دوم را مکانیک ذره‌ای PM و ساختار

سوم را مکانیک کلاسیک ذره‌ای CPM می‌نامیم. این سه ساختار به‌ترتیب عبارت‌اند از (Stegmuller, 1976):

تعریف: x یک PK است اگر و تنها اگر P, T, s به نحوی وجود داشته باشند که:

اصل موضوع ۱ PK: $x = < P, T, s >$؛

اصل موضوع ۲ PK: مجموعهٔ P متناهی و غیرتهی باشد؛

اصل موضوع ۳ PK: مجموعهٔ T بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد؛

اصل موضوع ٤ PK: s تابعی از $P \times T$ به R3 باشد؛ به علاوه این‌که s در زیربازهٔ باز T بر حسب زمان دو بار مشتق‌پذیر باشد.

تعریف: x یک PM است اگر و تنها اگر P, T, m, s, f به نحوی وجود داشته باشند که:

اصل موضوع ۱ PM: $x = < P, T, s, m, f >$؛

اصل موضوع ۲ PM: مجموعهٔ P متناهی و غیرتهی باشد؛

اصل موضوع ۳ PM: مجموعهٔ T بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد؛

اصل موضوع ٤ PM: s تابعی از $P \times T$ به R3 باشد؛ به علاوه این‌که s در زیربازهٔ باز T بر حسب زمان دو بار مشتق‌پذیر باشد؛

اصل موضوع ۵ PM: m تابعی از P به R است؛ به نحوی که به ازای تمامی $u \in P$، $m(u) > 0$؛

اصل موضوع ٦ PM: f تابعی از $P \times T \times N$ به R3 است و $\Sigma i \in N\ f(u,t,i)$ به ازای تمامی $u \in P$ و $t \in T$ هم‌گرای مطلق است.

تعریف: x یک CPM است اگر و تنها اگر P, T, m, s, f به نحوی وجود داشته باشند که:

اصل موضوع ۱ CPM: $x = < P, T, s, m, f >$؛

اصل موضوع ۲ CPM: مجموعهٔ P متناهی و غیرتهی باشد؛

اصل موضوع ۳ CPM: مجموعهٔ T بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد؛

اصل موضوع ٤ CPM: s تابعی از $P \times T$ به R3 باشد؛به علاوه این‌که s در زیربازهٔ باز T بر حسب زمان دو بار مشتق‌پذیر باشد؛

اصل موضوع ۵ CPM: m تابعی از P به R است، به نحوی که به ازای تمامی $u \in P$، $m(u) > 0$؛

اصل موضوع ٦ CPM: f تابعی از $P\times T\times N$ به R3 است و $\Sigma i\in N\ f(u,t,i)$ به ازای تمامی $u\in P$ و $t\in T$ هم‌گرای مطلق است؛

اصل موضوع ۷ CPM: به ازای تمامی $u\in P$ و $t\in T$:

$$m\ (u).\ ^{\wedge}D2s\ (u,\ t) = \Sigma i\in N\ f\ (u,\ t,\ i)$$

مجموعهٔ ذرات می‌تواند تعبیری بـرای مجموعـهٔ P باشـد. تعبیـر فیزیکـی مجموعـهٔ T می‌تواند مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد که زمان طی‌شدهٔ اندازه‌گیری‌شده را بازنمایی می‌کنـد. تابع $s(u,t)$ برداری n- بعدی است که اگر $n=۳$ باشد، تعبیر فیزیکی چنـین تـابعی مـی‌توانـد تابع مکان ذرهٔ u در زمان t و در فضای سه‌بعدی باشد. اگـر $u\in P$ و $t\in T$ و $i\in N$، $f\ (u,t,i)$ می‌تواند به عنوان نیروی i–ام وارد بر ذرهٔ u در زمان t تعبیر شود.

اما بپردازیم به مکانیک لاگرانژی؛ اسـنید (Sneed) در صـورت‌بنـدی خـود از مکانیـک لاگرانژی (Sneed, 1979: 207) سطح اول ساختاری برای مکانیک لاگرانـژی را همـان PK قرار می‌دهد. سطح دوم یا مکانیک تعمیم‌یافته GM را چنین صورت‌بندی می‌کند:

تعریف: x یک GM است اگر و تنها اگر P, T, s, X, h, q, Q, K به نحوی وجود داشـته باشند که:

اصل موضوع ۱ GM: $x = < P, T, s, X, h, q, Q, K >$؛

اصل موضوع ۲ GM: $< P, T, s >$ یک PK باشد؛

اصل موضوع ۳ GM: h عدد صحیح است؛

اصل موضوع ٤ GM: q تابعی از $Ih\times T$ به اعداد حقیقی باشد چنان‌که به ازای هر $i\in Ih$ و $t\in T$، $Dq(i,t)$ موجود باشد؛

اصل موضوع ٥ GM: Q تابعی از $Ih\times Rh\times T$ به اعداد حقیقی باشد؛

اصل موضوع ٦ GM: X تابعی از $P\times Rh\times T$ به R3 است، به نحوی که:

(i) به ازای هر $i, j\in Ih+1$ و به ازای هـر $p\in P$، $<x1,\ldots,xh> \in Rh$ و $t\in T$، $^{۹}DiDjX(p, x1,\ldots,xh,t)$ موجود باشد؛

(ii) به ازای هر $p\in P$ و $t\in T$، $s(p, t)=X(p, q(1, t),\ldots,q(h, t), t)$؛

اصل موضوع ۷ GM: K تابعی از $R2h\times T$ به اعداد حقیقی است، به نحوی که بـه ازای هـر $i\in Ih+1$ و بـه ازای هـر $< x1,\ldots,xh,y1,\ldots,yh,t > \in R2h\times T$، $DiK(x1,\ldots,xh,y1,\ldots,yh,t)$ موجود باشد.

در این ساختار، مختصات تعمیم‌یافتهٔ q، نیروی تعمیم‌یافتهٔ Q و انرژی جنبشی کل سیستم یعنی K توابع نظریه‌ای هستند. yiها در شناسهٔ تابع انرژی جنبشی بازنمایی‌کنندهٔ سرعت‌های تعمیم‌یافته هستند.[10] h بیان‌کنندهٔ تعداد مؤلفه‌های مختصات تعمیم‌یافته است. X تابعی است که رابطهٔ میان s و q را بیان می‌کند. Di نیز بیان‌گر مشتق جزئی i–ام است. اما ساختار سطح سوم ساختاری است که در آن تابع انرژی جنبشی توسط معادلهٔ لاگرانژ به تابع نیروی تعمیم‌یافته مربوط می‌شود. این ساختار را مکانیک تعمیم‌یافتهٔ لاگرانژی LGM می‌نامیم (ibid: 208).

تعریف: x یک LGM است اگر و تنها اگر P, T, s, X, h, q, Q, K به نحوی وجود داشته باشند که:

اصل موضوع ۱ LGM: x = < P, T, s, X, h, q, Q, K > یک GM باشد؛

اصل موضوع ۲ GM: به ازای هر t∈ و i∈Ih داریم:

DtDh+iK(q(1,t),…, q(h,t), Dq(1,t),…, Dq(h,t),t)

- DiK(q(1,t),…, q(h,t), Dq(1,t),…, Dq(h,t),t)

=Q(i, q(1,t),…, q(h,t),t)

که اصل موضوع دوم صورت گستردهٔ معادلهٔ لاگرانژ برای مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ i– ام است. با این فرض که نیروی ناپایستاری وجود ندارد. درواقع، همان نقشی که قانون دوم نیوتن یا اصل موضوع هفتم در CPM ایفا می‌کند، معادلهٔ لاگرانژ در LGM ایفا می‌کند.

تا به این‌جا هیچ‌گونه ارتباطی میان CPM و LGM برقرار نکرده‌ایم؛ به عبارت دیگر تابع Q در LGM هیچ‌گونه ارتباطی با تابع f در CPM ندارد. اسنید رابطهٔ میان این دو ساختار را با رابطهٔ ذیل تعریف می‌کند (ibid: 209):

اگر F یک رابطهٔ دوتایی باشد، <x,x'> ∈F اگر و تنها اگر P,T,s,m,f و P',T',s',X,h,Q,K به نحوی وجود داشته باشند که:

۱. x = < P,T,s,m,f > یک PM باشد؛

۲. x' = <P',T',s',X,h,q,Q,K > یک GM باشد؛

۳. < P,T,s > = <P',T',s' >؛

٤. به ازای هر <x1,…,xh,y1,…,yh,t> ∈ R2h× T:

K(x1,…,xh,y1,…,yh,t)

=Σp∈P m(p)/2 Σhj=1 [DjX(p,x1,…,xh,t)yj

+Dh+1X(p, x1,…,xh,t)]2;

۵. به ازای هر $< i,x1,\dots,xh,t > \in Ih\times R2h\times T$:

$$Q(i, x1,\dots,xh,t)=\Sigma p\in P[\Sigma hj=1f(p,t,j)]$$
$$\times DiX(p, x1,\dots,xh,t).$$

٤ انرژی جنبشی تعمیم‌یافته را با توجه به مکانیک ذره‌ای کلاسیک بازتعریف مـی‌کنـد؛ ۵ همان رابطهٔ تبدیل ۱۰ است. اگر تابع X تابع این‌همانی باشد مختصات تعمیم‌یافتهٔ q تبدیل به مختصات تعمیم‌یافتهٔ s می‌شود که بُعد طول داشت. در این حالت تابع Q و f نیز ایـن‌همـان می‌شوند. اما قضیهٔ مهمی که در ارتباط با CPM و LGM داریم این است که (ibid: 210):

قضیه: اگر $<x,x'> \in F$ و اگر x یک CPM باشد، 'x یک LGM خواهد بود.

به عبارت دیگر قضیهٔ مزبور ادعا می‌کند اگر الگویی از CPM بر اسـاس روابـط تبـدیل (١٤) با ساختار دیگری در ارتباط باشد، آن ساختار ضرورتاً الگویی از LGM است.

یکی از مزیت‌های ساختارگرایی در فلسفهٔ فیزیک این است که مقادیر فیزیکی بر اساس نقش‌شان در یک ساختار متعین (identify) می‌شوند نه بر اساس ویژگی‌های فردی‌شان. این خصلت می‌تواند از سطح زبانی و معناشناختی به سطح هستی‌شناختی نیز سرایت کند: اعیان فیزیکی بر اساس روابط‌شان با سایر اعیان متعین می‌شوند نه بر اساس ویژگی‌های ذاتی‌شان (intrinsic properties). برای آن‌که موجودی نیروی تعمیم‌یافته باشد، اولین قدم آن است که مجموعه یا ساختاری که موجود در آن تعبیه شده است بیابیم. سپس ببینیم که ساختار مزبور الگویی از LGM است یا خیر. مرحلهٔ آخر این است که آزمون کنـیم نقـش آن موجـود در ساختار همانند نقش Q در LGM است یا خیر. اگر بود، موجود مزبور نیـروی تعمـیم‌یافتـه است. از طرف دیگر، اگر تابع X تابع این‌همانی باشد، f با Q این‌همان می‌شـود و درنتیجـه عیناً نقش Q را در LGM بازی می‌کند؛ بدون توجه به بُعد فیزیکـی. نیروهـای تعمـیم‌یافتـهٔ متمایز از f نیز جایگاه یک‌سانی را در LGM اشغال می‌کنند.

ناوردایی معادلات لاگرانژ نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ اخیر است: هر الگویی از مکانیک نیوتنی که بر اساس روابط تبدیل (١٤) با مختصات تعمیم‌یافتهٔ دیگری مرتبط شود، لزوماً الگویی از مکانیک لاگرانژی خواهد بود. اما تبعیت از رابطهٔ تبدیل (۱۰) (که شکل ساختاری آن توسط رابطهٔ F ذکر شد) هیچ‌گونه اختلالی در نقش واحدی که نیروهای تعمیم‌یافته باید ایفا کننـد وارد نمی‌کند. برخلاف صوری‌سازی در منطق مرتبهٔ اول که نقش‌های معناشناختی مختلفـی را به نیروهای تعمیم‌یافته اعطا می‌کرد.

۵. نتیجه‌گیری

اغلب انتقادات واردشده علیه دیدگاه مورد قبول و جانب‌داری‌ها از دیدگاه معنایی، با توجه به اهداف فلسفهٔ علمی شکل گرفته‌اند. برای مثال ادعا می‌شود دیدگاه مورد قبول نمی‌تواند تقلیل (reduction) نظریه‌ها را به همان معنایی که فیزیک‌دان‌ها درنظر دارند، الگوسازی کند. یا ادعا می‌شود دینامیک میان نظریه‌های علمی به آن نحوی که در دیدگاه معنایی بازسازی می‌شود، توسط دیدگاه مورد قبول بازسازی نمی‌شود. این نوشته بر آن بود بیش از پیش به قضایا و پراتیک فیزیک‌دان نزدیک شود و نشان دهد که دیدگاه مورد قبول نمی‌تواند مسیری که وی طی می‌کند را الگوسازی کند. اگر بخواهیم بر اساس دیدگاه مورد قبول ناوردایی معادلات لاگرانژ را نشان دهیم، باید هزینه‌هایی را صرف کنیم که پراتیک فیزیک تمایلی به پرداخت آن هزینه‌ها ندارد. در حالی که ناوردایی این معادلات در صوری‌سازی سوپیز ـ اسنیدی هیچ هزینهٔ گزافی برای فیزیک‌دان در پی ندارد.

پی‌نوشت‌ها

۱. برای بررسی تاریخی این موضوع ← Suppe, 1974.

۲. شهود اولیهٔ فیزیک‌دانان مبنی بر معادل‌بودن صورت‌بندی‌های متفاوت از مکانیک کلاسیک مورد نقد نیز قرار گرفته است. برای نمونه ← Curiel, 2009 و North, 2009.

این پرسش که دیدگاه معنایی هم‌ارزی نظریه‌های شهوداً معادل را نتیجه می‌دهد یا خیر توسط اچ. هالورسن (۲۰۱۲) مورد بررسی قرار گرفته است. مقاله گلیمور (۲۰۱۳) در نقد مقالهٔ پیشین است.

۳. می‌توان دو نوع تبدیل دستگاه مختصات را از هم متمایز کرد؛ نوع اول تبدیل *درزمان* است، به این معنا که دو دستگاه با توجه به زمان مورد بررسی قرار می‌گیرند؛ مانند تبدیل دستگاه‌های لخت توسط تبدیلات گالیله. تبدیل دوم تبدیل *هم‌زمان* است که در مقطع معینی از زمان انجام می‌شود. مانند تبدیل دستگاه دکارتی به استوانه‌ای. در این مقاله صرفاً تبدیلات هم‌زمان مورد بررسی قرار می‌گیرند.

٤. در صورت نبود نیروهای ناپایستار، در معادلات لاگرانژ، واژه‌ای که به صورت صریح به نیرو دلالت کند وجود ندارد. اما در صورت وجود نیروهای ناپایستار، واژهٔ نیرو به صورت صریح وجود خواهد داشت. هرچند در مورد اولی نیز به صورت ضمنی واژهٔ نیرو حضور دارد؛ چراکه لاگرانژی بر حسب پتانسیل و آن هم بر حسب نیرو قابل بازنویسی است.

۵. این‌همان‌بودن دو مقدار فیزیکی در دو دستگاه مختصات اساساً فرضی بدیهی نیست. می‌توان

نشان داد که تابع هامیلتونی برخلاف تابع پتناسیل و لاگرانژی در دو مختصات تعمیم‌یافته، بر یک مقدار فیزیکی دلالت نمی‌کند.

۶. به یاد داریم که رابطهٔ ۱۰ شرط لازم برای ناوردایی معادلات لاگرانژ بود.

۷. توابعی که اندازه‌گیری آن‌ها مستلزم استفاده از نظریه است.

۸. D عمل‌گر مشتق است.

۹. Di عمل‌گر مشتق جزیی نسبت به i–ام این شناسه است.

۱۰. انرژی جنبشی تعمیم‌یافته تابعیت مکان تعمیم‌یافته نیز دارد.

منابع

سایمون، ک (۱۳۸۰). *مکانیک*، ترجمهٔ اعظم نیرومند قاضی و غلام‌حسین همدانی، تهران: دانشگاه صنعتی شریف.

Curiel, Erik (2009). 'Classical mechanics is Lagrangian; it is not Hamiltonian; the semantics of physical theory is not semantical', Unpublished manuscript, manuscript, London School of Economics.

Glymour, Clark (2013). 'Theoretical equivalence and the semantic view of theories', *Philosophy of Science*, Vol. 80, No. 2.

Halvorson, H. (2012). 'What Scientific Theories Could Not Be*', *Philosophy of Science*, Vol. 79, No. 2.

North, Jill (2009). 'The "Structure" of Physics: A Case Study', *Journal of Philosophy*, No.106.

Beth, E. (1949). 'Towards an up-to-date Philosophy of the Natural Sciences', *Methods,* Vol. 1.

French, S. and Ladyman, J. (1999). 'Reinflating the Semantic Approach', *International Studies in the Philosophy of Science,* 13.

Glymour, Clark (2013). 'Theoretical equivalence and the semantic view of theories', *Philosophy of Science*, Vol. 80, No. 2.

Hanson, N. R. (1948). *Patterns of Discovery*, Cambridge: Cambridge University Press.

Johns, O. D. (2005). *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics*, Oxford: Oxford University Press.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago: University of Chicago Press.

Ladyman, J. (1998). 'What is Structural Realism?', *Studies in History and Philosophy of Science,* No. 29.

Lindsay, R. B. and H. Margenau (1936). *Foundations of Physics*, NewYork: John Wiley.

North, Jill (2009). 'The "Structure" of Physics: A Case Study', *Journal of Philosophy*, No. 106.

Putnam, H. (1998). 'What Theories are not', *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 44.

Sneed, J. (1979). *The Logical Structure of Mathematical Physics*, Dordrecht: Reidel.

Stegmuller, W. (1976). *The Structure and Dynamics of Theories*, Berlin: Springer-Verlag.

Suppe, F. (1967). *The Meaning and Use of Models in Mathematics and the Exact Sciences*, PhD Thesis, Michigan: University of Michigan.

Suppe, F. (1974). *The Structure of Scientific Theories*, Chicago: University of Illinois Press.

Suppe, P. (1957). *Introduction to Logic*, Princeton: Van Nostrand.

Van Fraassen, B. C. (1970). 'On the Extension of Beth's Semantics of Physical Theories', *Philosophy of Science*, 37.

Van Fraassen, B, C. (1980). *The Scientific Image*, NewYork: Oxford University Press.