

Paul Benacerraf: The Identity of Numbers and Structuralism

Ramin Kazemi*

Abstract

Paul Joseph Salomon Benacerraf, a professor of the philosophy of mathematics at Princeton University, passed away in 2025 at the age of 93. By raising a number of fundamental questions, he transformed the philosophy of mathematics from a primarily logical enterprise into a profound epistemological and metaphysical inquiry. His papers are widely regarded as among the most influential works in twentieth-century philosophy of mathematics and played a pivotal role in the emergence and development of mathematical structuralism. This paper examines the two articles that brought him international recognition and briefly reviews the reactions they elicited from other philosophers. Benacerraf argued that numbers lack an intrinsic identity independent of the mathematical structures in which they occur; what matters is the “role” they occupy within a numerical structure. He also formulated a challenge that later became known as the “Benacerraf Problem”: how is it possible for human beings to have knowledge of abstract mathematical objects.

Keywords: numbers; the Benacerraf problem; mathematical epistemology; structuralism.

Introduction

Paul Benacerraf is widely recognized as one of the most influential philosophers of mathematics in the twentieth century. His work fundamentally reshaped philosophical debates by shifting attention from the logical foundations of

* Professor of Statistics Department, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran,
r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

Date received: 24/01/2026, Date of acceptance: 20/02/2026



mathematics to deeper epistemological and metaphysical questions. Rather than asking merely what mathematical objects are, Benacerraf challenged philosophers to explain how human beings can possess knowledge of abstract mathematical entities. The present study examines Benacerraf's philosophical contributions through an analytical review of his two landmark papers, "*What Numbers Could Not Be (1965)*" and "*Mathematical Truth (1973)*", which transformed contemporary philosophy of mathematics. The article also reviews the intellectual responses of later philosophers and evaluates Benacerraf's lasting influence on mathematical structuralism. Special attention is devoted to his rejection of the intrinsic identity of numbers and to the epistemological challenge that has become known as the "*Benacerraf Problem*". By exploring these ideas, the study demonstrates how Benacerraf redirected philosophical inquiry from the ontology of numbers toward the nature and possibility of mathematical knowledge.

Materials and Methods

This research adopts a qualitative and analytical approach based on documentary and philosophical analysis. The primary sources consist of Benacerraf's seminal papers published in 1965 and 1973, supplemented by his edited volume with Hilary Putnam and major secondary literature written by contemporary philosophers of mathematics, including Stewart Shapiro, Michael Resnik, Hartry Field, Penelope Maddy, Charles Parsons, Mark Colyvan, Øystein Linnebo, Gideon Rosen, and others. The study systematically examines Benacerraf's principal arguments concerning the ontology of numbers, structuralism, and mathematical epistemology. It also compares his views with major philosophical schools, including Platonism, Logicism, Formalism, Intuitionism, Nominalism, and Structuralism. Furthermore, the historical development of his ideas and their influence on subsequent philosophical debates are investigated through a critical review of published scholarly literature and citation records. The research method is therefore interpretative rather than empirical, aiming to reconstruct Benacerraf's arguments, assess their logical coherence, and evaluate their philosophical significance within the broader development of modern philosophy of mathematics.

Discussion and Results

The analysis demonstrates that Benacerraf introduced two revolutionary arguments that continue to shape contemporary philosophy of mathematics. In his "1965

paper”, he criticized the traditional identification of numbers with particular sets. By comparing the set-theoretical constructions proposed by John von Neumann and Ernst Zermelo, he argued that equally valid mathematical systems assign different set-theoretic identities to the same numbers. Since no principled reason exists for preferring one representation over another, numbers cannot possess unique intrinsic identities. Their significance lies solely in the structural positions they occupy within mathematical systems. This conclusion provided one of the strongest philosophical motivations for mathematical structuralism, according to which mathematical objects are defined relationally rather than independently. The second major contribution emerged in his “1973 *paper*”, where Benacerraf shifted philosophical attention from ontology to epistemology. He argued that an adequate philosophy of mathematics must satisfy both semantic and epistemological requirements. While Platonism successfully explains the objectivity and necessity of mathematical truths, it fails to explain how finite human beings can acquire knowledge of causally inert abstract objects. Conversely, nominalist or formalist approaches often provide more plausible accounts of mathematical knowledge but struggle to explain the apparent objectivity and truth of mathematics. This tension became known as the Benacerraf Problem and remains one of the central unresolved issues in contemporary philosophy. The study further shows that Benacerraf’s work generated extensive philosophical debate. Structuralists such as Stewart Shapiro expanded his relational conception of mathematical objects by providing more elaborate theories of mathematical structures. Nominalists, including Hartry Field, attempted to eliminate commitment to abstract mathematical entities altogether, while naturalists such as Penelope Maddy questioned Benacerraf’s assumption that mathematical knowledge requires causal interaction. Other philosophers, including Charles Parsons, Mark Colyvan, Gideon Rosen, and Øystein Linnebo, proposed alternative responses addressing either the ontological or epistemological dimensions of the problem. Despite these diverse approaches, none has achieved universal acceptance, confirming the enduring philosophical significance of Benacerraf’s challenge. The article also emphasizes Benacerraf’s broader intellectual legacy. Although he published relatively few papers, his writings have received thousands of scholarly citations and fundamentally redirected research in philosophy of mathematics, influencing debates in metaphysics, epistemology, philosophy of language, and philosophy of science. His ideas contributed significantly to the emergence of

modern mathematical structuralism and continue to serve as reference points in contemporary discussions concerning mathematical realism and abstract objects.

Conclusion

This study concludes that Paul Benacerraf transformed the philosophy of mathematics by demonstrating that questions concerning the identity of mathematical objects cannot be separated from questions concerning mathematical knowledge. His rejection of the intrinsic identity of numbers provided a powerful philosophical foundation for structuralism, while his epistemological challenge exposed significant weaknesses in both realist and anti-realist accounts of mathematics. The Benacerraf Problem continues to resist definitive resolution because no existing philosophical theory simultaneously offers a fully satisfactory account of both the truth and the knowability of mathematics. Consequently, Benacerraf's work remains central to contemporary philosophical inquiry and continues to inspire new approaches to ontology, epistemology, and the foundations of mathematics. His contributions represent a lasting shift from viewing mathematics merely as a formal logical discipline toward understanding it as a profound philosophical investigation into the nature of abstract knowledge and human cognition.

Bibliography

- Balaguer, M. (1998). *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford University Press.
- Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *The Philosophical Review*, 74(1), 47-73.
- Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. *The Journal of Philosophy*, 70(19), 661-679.
- Benacerraf, P. and Putnam, H. (1983). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings (second Edition)*, Cambridge University Press.
- Colyvan, M. (2002). Mathematics and aesthetic considerations in science, *Mind*, 111 (441), 69-74.
- Field, H. (2016). *Science without Numbers*, Oxford University Press.
- Linnebo, Ø. (2020). *Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press.
- Maddy, P. (1997). *Naturalism in Mathematics*, New York: Oxford University Press.
- Michael Resnik (1981). Mathematics as a Science of Patterns, *Noûs*, 15(4), 529-550
- Parsons, C. (1990). The structuralist view of mathematical objects, *The Philosophy of Mathematics*, Part II, 84(3), 303-346.
- Quine, W. (1976). *The Ways of Paradox, and other Essays*, Cambridge: Harvard University Press.
- Rosen, G. (1993). A Problem for Fictionalism about Possible Worlds, *Analysis*, 53 (2), 71-81.

35 Abstract

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford University Press.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics: the philosophy of mathematics*, New York: Oxford University Press.

Shapiro, S. (2007). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*.

پُل بناسراف: هویت اعداد و ساختارگرایی

رامین کاظمی*

چکیده

پُل جوزف سالومون بناسراف، استاد فلسفه‌ی ریاضیات دانشگاه پرینستون، در سال ۲۰۲۵ و در سن ۹۳ سالگی درگذشت. او با طرح مسئله‌هایی بنیادین، فلسفه‌ی ریاضیات را از بحثی صرفاً منطقی به مسئله‌ای عمیق در معرفت‌شناسی و متافیزیک تبدیل کرد. مقالات او ازجمله مهم‌ترین آثار فلسفه‌ی ریاضیات در قرن بیستم به‌شمار می‌روند و نقش مهمی در شکل‌گیری و گسترش دیدگاه «ساختارگرایی» در ریاضی دارند. دو مقاله که باعث شهرت جهانی او شد مورد بررسی قرار خواهند گرفت و واکنش دیگر فلاسفه به آنها، به‌صورت مختصر، مرور خواهند شد. بناسراف نتیجه گرفت که اعداد، هویت ذاتی مستقل ندارند؛ آنچه مهم است «نقش» آنها در ساختار عددی است. او همچنین مسئله‌ای را مطرح کرد که بعدها به «مسئله‌ی بناسراف» مشهور شد: این پرسش که چگونه انسان می‌تواند درباره‌ی اشیای انتزاعی ریاضی شناخت داشته باشد.

کلیدواژه‌ها: اعداد، مسئله‌ی بناسراف، معرفت‌شناسی ریاضی، ساختارگرایی.

۱. مقدمه

فلسفه‌ی ریاضیات، به‌عنوان یکی از بنیادی‌ترین شاخه‌های فلسفه، به ماهیت اشیاء، صدق‌های ریاضی و امکان شناخت آنها می‌پردازد. مهم‌ترین پرسش‌هایی که فیلسوفان و ریاضیدانان را به خود مشغول کرده است عبارتند از: «اعداد واقعاً چه هستند؟»، «آیا اشیای ریاضی وجود

* استاد گروه آمار، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران، r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۰۴، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۲/۰۱



مستقل دارند؟» و در نهایت «چگونه انسان به یقین ریاضی دست پیدا می‌کند؟» (Shapiro, 1997). در قرن بیستم، با پیشرفت منطق جدید و نظریه‌ی مجموعه‌ها، این پرسش‌ها مورد توجه بیشتر قرار گرفتند و فیلسوفانی بزرگی مانند گوتلوب فرگه (Gottlob Frege)، برتراند راسل (Bertrand Russell)، دیوید هیلبرت (David Hilbert)، کورت گودل (Gödel Kurt) و پل بناسراف (Paul Benacerraf) نقش مهمی در پاسخ به آنها ایفا کردند. در میان این فیلسوفان، بناسراف جایگاهی ویژه دارد؛ زیرا او با طرح مسئله‌هایی بنیادین، فلسفه‌ی ریاضیات را از بحثی صرفاً منطقی به مسئله‌ای عمیق در معرفت‌شناسی و متافیزیک تبدیل کرد (Balaguer, 1998).

به‌طور کلی، فلسفه‌ی ریاضیات به بررسی مبانی و معانی ریاضیات می‌پردازد. مهم‌ترین دیدگاه‌های این حوزه از فلسفه عبارت‌اند از: افلاطون‌گرایی (Platonism)، منطق‌گرایی (Logicism)، صورت‌گرایی (Formalism)، شهودگرایی (Intuitionism) و ساختارگرایی (Structuralism). افلاطون‌گرایان معتقد هستند که اشیای ریاضی مانند اعداد، مجموعه‌ها و توابع وجودی مستقل از ذهن انسان دارند. براساس این دیدگاه، ریاضیدان چیزی را اختراع نمی‌کند، بلکه صدق‌هایی را کشف می‌کند که پیش‌تر وجود داشته‌اند. کورت گودل از مشهورترین مدافعان این دیدگاه بود. مزیت افلاطون‌گرایی توضیح عینیت و قطعیت ریاضیات است، اما مشکل اصلی آن توضیح این مسئله است که انسان چگونه می‌تواند به اشیائی غیرمادی و خارج از زمان و مکان معرفت پیدا کند. منطق‌گرایی که با آثار فرگه و راسل شناخته می‌شود، بر این باور است که تمام ریاضیات را می‌توان به منطق فروکاست. در این دیدگاه، گزاره‌های ریاضی در غایت آن چیزی جز گزاره‌های منطقی نیستند. اقدام فیلسوفانی مانند راسل و آلفرد وایتهد (Alfred Whitehead) در نگارش کتاب وزین اصول ریاضی (Principia Mathematica) تلاش بزرگی در این راستا بود، اما پارادوکس‌های نظریه‌ی مجموعه‌ها و قضایای ناتمامیت گودل (Gödel's incompleteness theorems) محدودیت‌های آن را آشکار ساختند. صورت‌گرایی، که بیشتر با دیوید هیلبرت شناخته می‌شود، ریاضیات را نظامی از نمادها و قواعد صوری می‌داند. در این نگاه، معنا اهمیت ثانوی دارد و آنچه مهم است سازگاری درونی دستگاه ریاضی یا همان مبانی است. هیلبرت بر آن بود که نشان دهد ریاضیات را می‌توان به‌صورت کامل و سازگار بنیان نهاد، اما قضایای گودل نشان دادند که چنین هدفی به‌طور کامل دست‌نیافتنی است. شهودگرایی که فیلسوف هلندی، لویتسن (Luitzen Egbertus Jan Brouwer) بنیان‌گذار آن بود، ریاضیات را

محصول فعالیت ذهن انسان می‌داند. از نظر شهودگرایان، تنها اشیایی معتبر هستند که بتوان آنها را به صورت ذهنی ساخت. شهودگرایان بسیاری از اصول کلاسیک، مانند قانون طرد شق ثالث (law of excluded middle)، را در ریاضیات نامعتبر می‌دانند. براساس این قانون برای هر گزاره، یا خود گزاره صحیح است یا نقیض آن (Benacerraf, 1965). ساختارگرایی ریاضی یکی از مهم‌ترین جریان‌های معاصر فلسفه‌ی ریاضیات است. دو نوع ساختارگرایی درون‌شیء (In re structuralism) و پیش از شیء (Ante rem structuralism) مطرح است و هر کدام پیروان خود را دارد. در ساختارگرایی درون‌شیء، ساختار از روابط میان اجزای اشیاء به دست می‌آید و اشیاء هویت دارند. در ساختارگرایی پیش از شیء، اعداد و اشیای ریاضی هویت مستقل ندارند، بلکه جایگاه آنها در یک ساختار اهمیت دارد (ساختار مقدم بر شیء است). برای مثال، عدد «۶» چیزی جز عضوی در ساختار اعداد طبیعی نیست. اندیشه‌های پُل بناسراف نقش مهمی در شکل‌گیری و گسترش این نگرش داشته است اگرچه به معنای کامل او ساختارگرا نبود (Shapiro, 2000).

هدف از نگارش مقاله، تأملی بر اندیشه‌ها و دستاوردهای پُل بناسراف، به عنوان یکی از شناخته‌شده‌ترین فیلسوفان ریاضی معاصر، است. برای این منظور، ابتدا زندگینامه و سپس فعالیت‌ها و افتخارات او در طول زندگی، بویژه در دانشگاه پرینستون، مرور می‌شوند. در ادامه، به دو مقاله‌ی اصلی و تأثیرگذار او اشاره می‌شود. در این خصوص، استدلال‌ها و دستاوردهای دو مقاله را برشمرده و همچنین واکنش فیلسوفان دیگر نسبت به آنها آورده خواهد شد. مقاله با یک نتیجه‌گیری پایان داده خواهد شد.

۲. زندگینامه

پُل بناسراف در ۲۶ مارس سال ۱۹۳۰ در پاریس به دنیا آمد. خانواده‌ی او ریشه‌ای مراکشی و الجزایری داشتند. پدرش بازرگانی اهل مراکش و مادرش اهل الجزایر بود. دوران کودکی او با اوج‌گیری فاشیسم و تهدید نازیسم در اروپا هم‌زمان شد. به همین دلیل، خانواده‌اش فرانسه را ترک کردند. ابتدا به کاراکاس (ونزوئلا) و سپس به نیویورک (ایالات متحده آمریکا) مهاجرت کردند. این مهاجرت تأثیر عمیقی بر زندگی و شکل‌گیری شخصیت فکری او گذاشت. در نوجوانی، او به مدرسه‌ی شبانه‌روزی پدی در نیوجرسی فرستاده شد. بناسراف تحصیلات دانشگاهی خود را در دانشگاه پرینستون و در سال ۱۹۴۸ آغاز کرد. او در ابتدا به ریاضیات علاقه‌مند بود، اما به تدریج جذب فلسفه و منطق شد. در مقطع

۴۰ فلسفه علم، سال ۱۵، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۴

کارشناسی تحت تأثیر درس‌های جان جورج کمنی (János György Kemény)، استاد مجاری تبار فلسفه، قرار گرفت.

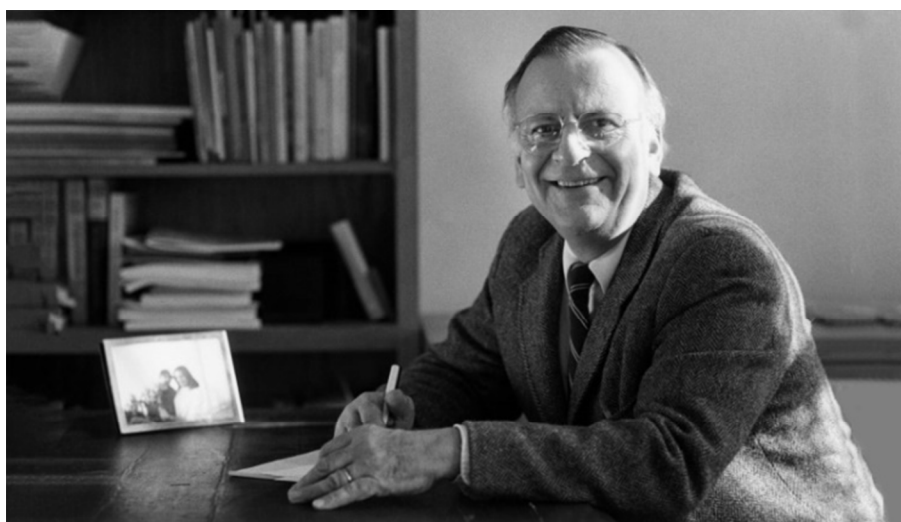


Photo by J.T. Miller

بناسراف سال ۱۹۵۲ وارد مقطع تحصیلات تکمیلی همان دانشگاه شد. در این مقطع تحت تأثیر استادانی مانند هیلاری پاتنم (Hilary Putnam) و کارل گوستاو همپل (Carl Gustav Hempel) قرار گرفت و در فضای فلسفه‌ی تحلیلی رشد کرد. او مدرک دکترای خود را در فلسفه از دانشگاه پرینستون دریافت کرد و سپس در همان دانشگاه به تدریس مشغول شد. بناسراف تقریباً تمام دوران حرفه‌ای خود را در پرینستون گذراند و به یکی از شناخته‌شده‌ترین استادان فلسفه در این دانشگاه تبدیل شد. فعالیت دانشگاهی بناسراف صرفاً محدود به تدریس نبود. او نقش مهمی در توسعه‌ی برنامه‌های فلسفه‌ی منطق و ریاضیات در دانشگاه ایفا کرد و نسل بزرگی از فیلسوفان تحلیلی معاصر تحت تأثیر آموزش‌های او قرار گرفتند. کلاس‌های او به دقت منطقی، وضوح مفهومی و تحلیل موشکافانه مشهور بود. او نقش مهمی در تبدیل بخش فلسفه‌ی پرینستون به یکی از معتبرترین مراکز فلسفه‌ی تحلیلی جهان داشت و فیلسوفان بزرگی مانند ساول کریپکی (Saul Kripke)، دیوید لویس (David Lewis) و توماس نگل (Thomas Nagel) را به این دانشگاه جذب کرد (Shapiro, 2007).

شهرت اصلی بناسراف به خاطر پژوهش‌هایش در فلسفه‌ی ریاضیات است. اگرچه او تنها ۱۴ مقاله‌ی علمی-پژوهشی نوشت اما دو مقاله‌ی زیر شهرت جهانی را برای او به دنبال داشت. اولین مقاله تحت عنوان «چه اعدادی نمی‌توانند باشند» (What Numbers Could Not Be) در سال ۱۹۶۵ (Benacerraf, 1965) و دومین مقاله تحت عنوان «صدق ریاضی (Mathematical Truth)» در سال ۱۹۷۳ منتشر شدند (Benacerraf, 1973). او در این آثار مسئله‌ای را مطرح کرد که بعدها به «مسئله‌ی بناسراف» مشهور شد: این پرسش که چگونه انسان می‌تواند درباره‌ی اشیای انتزاعی ریاضی شناخت داشته باشد؟ در اینجا، از مقاله‌ی اول تحت عنوان «مقاله‌ی ۱۹۶۵» و از مقاله‌ی دوم تحت عنوان «مقاله‌ی ۱۹۷۳» یاد خواهیم کرد. او همراه با هیلاری پاتنم کتاب مشهور «فلسفه‌ی ریاضیات: گزیده‌ای از منابع» را ویرایش کرد که سال‌ها متن استاندارد فلسفه‌ی ریاضیات بود (Benacerraf and Putnam, 1983). شناخته‌شده‌ترین و پرتکرارترین درس او در دانشگاه «فلسفه‌ی ریاضیات» بود. درسی که هم دانشجویان کارشناسی و هم دانشجویان تحصیلات تکمیلی در آن شرکت داشتند. علاوه‌بر آن، او در حوزه‌های منطق، معرفت‌شناسی، متافیزیک، فلسفه‌ی زبان و فلسفه‌ی علم نیز تدریس و سمینار برگزار می‌کرد. بناسراف به‌عنوان استادی سخت‌گیر اما بسیار الهام‌بخش و زندگی‌ساز شناخته می‌شد (Shapiro, 1997).

۳. فعالیت‌ها و افتخارات

پُل بناسراف بیش از آنکه به‌عنوان سخنرانی‌پرکار شناخته شود، به‌عنوان فیلسوفی دانشگاهی و تأثیرگذار در محیط‌های تخصصی فلسفه‌ی تحلیلی شهرت داشت. بخش مهمی از نفوذ او از طریق سمینارهای دانشگاهی، کنفرانس‌های فلسفه‌ی ریاضیات و تربیت دانشجویان در دانشگاه پرینستون شکل گرفت. کلاس درس «فلسفه‌ی ریاضیات» او به‌تدریج به یکی از مهم‌ترین کانون‌های بحث فلسفه‌ی ریاضیات در آمریکا تبدیل شد. در این کلاس بناسراف همواره تأکید می‌کرد که مسئله‌ی اصلی فلسفه‌ی ریاضیات تنها «وجود» اشیای ریاضی نیست، بلکه توضیح این موضوع است که انسان چگونه می‌تواند به آنها معرفت پیدا کند. یکی از بنیادی‌ترین پرسش‌های او همواره این بود که «چگونه اشیای متناهی می‌توانند به نامتناهی معرفت پیدا کنند؟». مقاله‌ی ۱۹۶۵ که ابتدا در قالب سخنرانی‌ها و بحث‌های تخصصی فلسفه‌ی ریاضیات مطرح شد، یکی از تأثیرگذارترین ارائه‌های علمی قرن بیستم در این حوزه به‌شمار می‌رود. او در این سخنرانی‌ها استدلال می‌کرد که اعداد را نمی‌توان با

اشیای خاص نظریه‌ی مجموعه‌ها یکی دانست؛ زیرا دستگاه‌های متفاوت نظریه‌ی مجموعه‌ها، تعاریف متفاوتی از اعداد ارائه می‌کنند. در نتیجه، اهمیت اعداد نه در «ماهیت ذاتی» بلکه در «جایگاه ساختاری» آنهاست. این سخنرانی‌ها زمینه‌ساز رشد ساختارگرایی در فلسفه‌ی ریاضیات شد و بعدها فیلسوفانی چون استوارت شاپیرو (Stewart Shapiro) آن را بسط دادند. بناسراف مسئله‌ای بنیادین را مطرح کرد: اگر اشیای ریاضی خارج از زمان و مکان‌اند، و شناخت انسانی نیازمند رابطه‌ی علی است، پس انسان چگونه می‌تواند به صدق‌های ریاضی دسترسی پیدا کند؟ این مسئله تأثیر عمیقی بر معرفت‌شناسی ریاضی گذاشت و هنوز هم یکی از مهم‌ترین چالش‌های فلسفه‌ی تحلیلی محسوب می‌شود. در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ همکاری علمی نزدیکی با هیلاری پاتنم داشت. این دو فیلسوف مجموعه‌ای از سمینارها و نشست‌های تخصصی درباره‌ی منطق، بنیادهای ریاضیات، و واقع‌گرایی ریاضی برگزار کردند. افزون بر فلسفه‌ی ریاضیات، در زمینه‌ی آموزش دانشگاهی و سیاست علمی نیز سخنرانی‌هایی داشت. در دوران فعالیتش به‌عنوان معاون آموزشی و سپس معاون ارشد دانشگاه پرینستون، او درباره‌ی اصلاح آموزش عالی، جایگاه زنان در دانشگاه، و اهمیت فلسفه در علوم انسانی فعالیت می‌کرد. یکی از فعالیت‌های مهم او مشارکت در پژوهش‌هایی بود که نشان می‌داد پذیرش زنان در دانشگاه پرینستون از نظر مالی و آموزشی امکان‌پذیر و سودمند است؛ اقدامی که در تحول ساختار دانشگاه نقش مهمی داشت. بناسراف دو بار موفق به دریافت بورسیه‌ی بنیاد یادبود جان سایمون گوگنهایم (John Simon Guggenheim Memorial Foundation Fellowship) شد. افتخاری که به پژوهشگران برجسته‌ی علوم و هنر اعطا می‌شود. این جایزه معمولاً به پژوهشگرانی داده می‌شود که آثارشان تأثیر جدی در حوزه‌ی علمی خود داشته است. دریافت دوباره‌ی آن نشان‌دهنده‌ی جایگاه برجسته‌ی بناسراف در فلسفه‌ی تحلیلی بود. بناسراف در سال ۱۹۹۸ به عضویت آکادمی هنرها و علوم آمریکا (American Academy of Arts and Sciences) درآمد. این آکادمی یکی از معتبرترین نهادهای علمی آمریکا است و عضویت در آن به دانشمندانی اعطا می‌شود که سهمی برجسته در دانش و فرهنگ داشته باشند. او سال‌ها استاد ممتاز فلسفه در دانشگاه پرینستون بود و در نهایت توانست عنوان معتبر و ارزشمند «مک‌دانل (James S. McDonnell Distinguished University Professor)» را دریافت کند؛ عنوانی که به برجسته‌ترین استادان دانشگاه اعطا می‌شود. این عنوان یکی از بالاترین افتخارات دانشگاهی در نظام آموزش عالی آمریکا محسوب می‌شود. او دو بار ریاست گروه فلسفه‌ی پرینستون و

یکبار نیز سمت معاون ارشد دانشگاه را بر عهده داشت. این مسئولیت‌ها نشان‌دهنده نفوذ گسترده‌ی او در فضای فلسفه‌ی تحلیلی آمریکا دارد (Shapiro, 1997). برای جزئیات بیشتر می‌توان به وبسایت دانشگاه پرینستون مراجعه کرد.

۴. مقاله ۱۹۶۵

مقاله‌ی ۱۹۶۵ یکی از مهم‌ترین آثار فلسفه‌ی ریاضیات در قرن بیستم به‌شمار می‌رود. اهمیت این مقاله در آن است که برای نخستین بار به‌صورت دقیق و تحلیلی نشان داد بسیاری از نظریه‌های رایج درباره‌ی ماهیت اعداد با مشکلی بنیادین روبه‌رو هستند. این مقاله نه‌تنها نقدی بر افلاطون‌گرایی و نظریه‌ی مجموعه‌ها بود، بلکه زمینه‌ساز ظهور «ساختارگرایی ریاضی» نیز شد. موضوع اصلی مقاله این پرسش محوری بود: «اعداد دقیقاً چه هستند؟» در فلسفه‌ی ریاضیات قرن بیستم، بسیاری از فیلسوفان و منطق‌دانان می‌کوشیدند اعداد را به مجموعه‌ها فروبکاهند. بویژه، پس از کارهای فرگه، راسل و نظریه‌ی مجموعه‌ها، این ایده رایج شد که هر عدد را می‌توان با یک مجموعه‌ی خاص تعریف کرد؛ بنابراین اعداد همان مجموعه‌ها هستند. اما بناسراف نشان داد که این پاسخ با مشکل مهمی روبه‌رو است. استدلال اصلی مقاله نشان داد که در نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان اعداد را به شیوه‌های مختلف تعریف کرد، بدون آنکه یکی بر دیگری برتری داشته باشد. در مقاله، او به دستگاه جان فون نویمان (John von Neumann) اشاره کرد. در این دستگاه؛

$$\begin{aligned}0 &= \emptyset \\1 &= \{\emptyset\} \\2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.\end{aligned}$$

بناسراف این دستگاه را در مقابل دستگاه دیگری که ارنست زرمelo (Ernst Zermelo) معرفی کرد، قرار داد. در این دستگاه؛

$$\begin{aligned}0 &= \emptyset \\1 &= \{\emptyset\} \\2 &= \{\{\emptyset\}\} \\3 &= \{\{\{\emptyset\}\}\}.\end{aligned}$$

او استدلال کرد هر دو دستگاه از نظر منطقی سازگارند، ریاضیات را به‌خوبی بازسازی می‌کنند، و ازطرفی تمام ویژگی‌های حساب را حفظ می‌کنند. اما مشکل اینجاست که اگر

عدد ۳ واقعاً یک «شیء» خاص باشد، پس کدام یک از این دو شیء، واقعاً عدد ۳ است؟ از آنجاکه پاسخ قانع کننده‌ای وجود ندارد، بناسراف نتیجه گرفت که اعداد، هویت ذاتی مستقل ندارند؛ آنچه مهم است «نقش» آنها در ساختار عددی است. به بیان دیگر، عدد ۳ چیزی نیست جز «جایگاه سوم» در ساختار اعداد طبیعی. بناسراف عملاً به این نتیجه رسید که ریاضیات درباره‌ی اشیای مستقل نیست، بلکه درباره‌ی ساختارها و روابط است. این ایده بعدها به یکی از مبانی اصلی ساختارگرایی ریاضی تبدیل شد. در ساختارگرایی، اهمیت عدد در روابطش با دیگر اعداد است، نه در ماده یا ماهیت درونی آن (Benacerraf, 1965). پیش از بناسراف، بیشتر فیلسوفان می‌کوشیدند که «ماهیت» اعداد را پیدا کنند؛ اما بناسراف نشان داد شاید این پرسش اساساً اشتباه باشد. او توجه فلسفه‌ی ریاضیات را از «اعداد چه هستند؟» به «اعداد چه نقشی در ساختار دارند؟» تغییر داد. این تغییر جهت بسیار عمیق و تعیین کننده بود (Balaguer, 1998). بناسراف نشان داد که فروکاستن اعداد به مجموعه‌ها دلخواهی است، و هیچ تعریف یکتایی وجود ندارد. این استدلال ضربه‌ای جدی به پروژه‌ی منطق‌گرایی فرگه و راسل وارد کرد (Shapiro, 1997). بسیاری از فیلسوفان معاصر مانند استوارت شاپیرو و مایکل رزینیک (Michael Resnik) مستقیماً تحت تأثیر این مقاله قرار گرفتند. ساختارگرایی مدرن تا حد زیادی ادامه‌ی همان ایده‌ای است که بناسراف در این مقاله مطرح کرد. فرگه و راسل می‌خواستند اعداد را دقیقاً با اشیایی منطقی یکی بدانند. اما بناسراف توضیح داد هیچ شیء خاصی نمی‌تواند «ذات» عدد باشد. افلاطون‌گرایان معتقد بودند که اعداد اشیائی واقعی و مستقل‌اند. اما بناسراف نشان داد که حتی اگر اعداد وجود داشته باشند، مشخص نیست دقیقاً چه نوع اشیایی هستند. در مقابل، صورت‌گرایان ریاضیات را بازی نمادها می‌دانستند. اما بناسراف برخلاف آنان واقعیت ساختارهای ریاضی را جدی می‌گرفت، هرچند هویت اشیای ریاضی را انکار می‌کرد (Resnik, 1981). فیلسوفانی مانند گودل معتقد بودند بناسراف مسئله را اشتباه فهمیده است. از نظر آنان اعداد اشیائی انتزاعی واقعی‌اند، و اختلاف در نمایش مجموعه‌ای اهمیتی ندارد. آنان اعتقاد داشتند همان‌طور که یک شیء فیزیکی را می‌توان با توصیف‌های مختلف بیان کرد، عدد ۳ نیز می‌تواند نمایش‌های مختلفی داشته باشد. بنابراین، اختلاف فون نویمان و زرمelo صرفاً اختلاف در «بازنمایی» است، نه در خود عدد (Balaguer, 1998). برخی ساختارگرایان ایراد گرفتند که بناسراف دقیقاً توضیح نداده است که «ساختار» چیست، و چگونه وجود دارد. به‌عنوان مثال، استوارت شاپیرو کوشید نسخه‌ی کامل‌تری از ساختارگرایی ارائه کند که

موجودیت ساختارها، و صدق ریاضی را بهتر توضیح دهد (Shapiro, 1997). نومینالیست‌ها معتقد بودند بناسراف هنوز بیش از حد به اشیای انتزاعی وابسته است. آنان اعتقاد دارند حتی «ساختارها» نیز نوعی شیء انتزاعی‌اند. بنابراین، مقاله‌ی او مشکل هستی‌شناسی ریاضیات را کاملاً حل نکرده است (Field, 2016). برخی فیلسوفان معتقد هستند مقاله‌ی ۱۹۶۵ بیشتر مسئله‌ی هویت اعداد را بررسی می‌کند، اما هنوز توضیح نمی‌دهد انسان چگونه به صدق ریاضی دسترسی پیدا می‌کند. بناسراف در مقاله‌ی ۱۹۷۳ کوشید این مسئله را بررسی کند (Benacerraf, 1973). استدلال بناسراف بسیار ساده و چیزی جز وجود چند تعریف متفاوت از اعداد نبود. اما نتیجه‌ی فلسفی آن فوق‌العاده عمیق بود. او نشان داد شاید اصلاً پرسش از «ماهیت ذاتی عدد» اشتباه باشد. این ایده بسیاری از مباحث سنتی را زیر سؤال برد. این مقاله تنها بر فلسفه‌ی ریاضیات اثر نگذاشت؛ بلکه بر متافیزیک، فلسفه‌ی زبان، و معرفت‌شناسی نیز تأثیر داشت. تقریباً تمام نسخه‌های جدید ساختارگرایی ریاضی، به‌نوعی ادامه‌ی پرسش‌های مطرح‌شده در این مقاله‌اند. تا کنون ۱۸۹۲ بار به مقاله‌ی ۱۹۶۵ ارجاع و استناد شده است.

۵. مقاله ۱۹۷۳

بناسراف در مقاله‌ی ۱۹۷۳ بحث را از «ماهیت اشیای ریاضی» به «امکان معرفت ریاضی» تغییر داد. پیش از بناسراف، مسئله‌ی اصلی فلسفه‌ی ریاضی عمدتاً این بود که اعداد چه هستند؟ آیا واقعاً وجود دارند؟ ریاضیات کشف است یا اختراع؟ اما بناسراف نشان داد حتی اگر پاسخ این پرسش‌ها را داشته باشیم، هنوز مسئله‌ی عمیق‌تری باقی می‌ماند و آن این است که انسان چگونه می‌تواند صدق‌های ریاضی را بشناسد؟ مقاله‌ی ۱۹۷۳ شامل دو محور اصلی است:

۱. تحلیل معنا و صدق گزاره‌های ریاضی: بناسراف این پرسش را مطرح می‌کند که

وقتی می‌گوییم « $۲+۲=۴$ »، این گزاره چگونه صادق است؟

۲. تحلیل معرفت ریاضی: ما چگونه می‌دانیم این گزاره درست است؟

این دو مسئله در ظاهر مستقل‌اند، اما بناسراف نشان داد میان آنها ارتباط و در عین حال تنش عمیقی وجود دارد. او استدلال کرد که هر نظریه‌ی خوب در فلسفه‌ی ریاضیات باید دو شرط را برآورده کند: شرط معنایی که بیان می‌کند گزاره‌های ریاضی چگونه صادق‌اند و

شرط معرفت‌شناختی که بیان می‌کند انسان چگونه آنها را می‌شناسد. اما مشکل اینجاست که نظریه‌هایی که شرط اول را خوب توضیح می‌دهند، معمولاً در شرط دوم شکست می‌خورند؛ و به عکس. بناسراف عمدتاً افلاطون‌گرایی را هدف قرار داد، زیرا این دیدگاه در آن زمان قوی‌ترین نظریه‌ی فلسفه‌ی ریاضی بود. از منظر افلاطون‌گرایی، اعداد و اشیای ریاضی واقعاً وجود دارند؛ مستقل از ذهن انسان‌اند؛ تغییرناپذیر و غیرمادی‌اند؛ خارج از زمان و مکان قرار دارند. به طور مثال، عدد «۷» حتی اگر هیچ انسانی وجود نداشت، همچنان وجود می‌داشت. بناسراف اعتراف می‌کند افلاطون‌گرایی یک مزیت بسیار مهم دارد که توضیح عینیت ریاضیات، جهانی‌بودن، ضروری‌بودن و مستقل‌بودن از سلیقه‌ی افراد است. برای مثال، « $4=2+2$ » در همه‌ی جهان‌ها صادق است. افلاطون‌گرایی این ویژگی را به خوبی توضیح می‌دهد چون گزاره‌های ریاضی درباره‌ی اشیای واقعی سخن می‌گویند. بناسراف دقیقاً در همین جا متمرکز می‌شود. او می‌گوید که شناخت انسانی معمولاً علی است. در علوم تجربی، ما چیزی را می‌شناسیم چون با آن رابطه‌ی علی داریم. برای مثال، نور به چشم می‌رسد، صدا به گوش منتقل می‌شود، اشیا بر حواس ما اثر می‌گذارند. اما اشیای ریاضی مکان ندارند، زمان ندارند، هیچ اثر فیزیکی ایجاد نمی‌کنند. پس چگونه ذهن انسان می‌تواند به آنها دسترسی پیدا کند؟ بناسراف مثال زیر را در نظر می‌گیرد: فرض کنید عدد «۵» شیئی انتزاعی است. سؤال این است که چگونه مغز فیزیکی انسان با شیئی غیرزمانی و غیرمکانی ارتباط برقرار می‌کند؟ او می‌گوید افلاطون‌گرایی هیچ توضیح روشنی برای این مسئله ندارد. او نتیجه می‌گیرد افلاطون‌گرایی از نظر معرفت‌شناختی ناقص است. زیرا صدق ریاضی را توضیح می‌دهد، اما راه دسترسی انسان به آن صدق را توضیح نمی‌دهد. از اینجا ایده‌ی مقاله شکل می‌گیرد. بناسراف نشان داد که هیچ نظریه‌ی رایجی نمی‌تواند هم‌زمان صدق ریاضی و معرفت ریاضی را توضیح دهد. این مسئله به بحران اصلی فلسفه‌ی ریاضیات معاصر تبدیل شد. صورت‌گرایان معتقد هستند ریاضیات صرفاً بازی نمادهاست. اما بناسراف پرسید که اگر ریاضیات فقط بازی نمادها باشد، چرا این قدر در توصیف جهان موفق است؟ نوینالیست‌ها وجود اشیای ریاضی را انکار می‌کردند. اما بناسراف معتقد بود که در این صورت توضیح اینکه چرا قضایای ریاضی «واقعاً درست‌اند» دشوار می‌شود. بعد از بناسراف تمرکز به این تغییر کرد که انسان چگونه به صدق‌های ریاضی دسترسی پیدا می‌کند؟ این تغییر جهت در فلسفه‌ی ریاضی بسیار مهم بود و واکنش‌های فراوانی را به دنبال داشت (Benacerraf, 1973). هارتری فیلد (Hartry Field) معتقد است شاید اصلاً نیازی به اشیای

ریاضی نباشد. او در کتاب «علم بدون اعداد» تلاش کرد نشان دهد که علوم فیزیکی را می‌توان بدون تعهد به اعداد بازسازی کرد (فیکشنالیسم^۱ (Fictionalism)). او می‌خواست مشکل معرفت را حذف کند، زیرا اگر اشیای ریاضی وجود نداشته باشند، دیگر نیازی به توضیح ارتباط با آنها نیست. بسیاری از فیلسوفان معتقد هستند پروژه‌ی او بسیار پیچیده و ناکامل است، و حذف کامل ریاضیات تقریباً ناممکن است (Field, 2016). پنلوپه مادی (Penelope Maddy) استدلال کرد شاید شناخت ریاضی الزاماً نیازمند رابطه‌ی علی نباشد. او معتقد بود ذهن انسان به‌طور طبیعی توانایی درک ساختارهای ریاضی را دارد. او نوعی «طبیعت‌گرایی» را ارائه کرد (Maddy, 1997). این استدلال هنوز دقیق توضیح نمی‌دهد که این توانایی شناختی چگونه کار می‌کند. استوارت شاپیرو (Stewart Shapiro) اعتقاد دارد بناسراف درست می‌گوید که اعداد اشیای مستقل نیستند، اما ساختارها واقعی‌اند. در ساختارگرایی اشیای ریاضی منفرد را نمی‌شناسیم، بلکه جایگاه‌ها در ساختارها را درک می‌کنیم: عدد «۳» فقط «عضو سوم» ساختار اعداد طبیعی است (Shapiro, 1997). ویلارد کوین (Willard Quine) استدلال کرد چون ریاضیات برای علوم ضروری است، باید به وجود اشیای ریاضی متعهد بود که استدلال اجتناب‌ناپذیری^۲ (indispensability argument) نام گرفت (Quine, 1976). لازم به یادآوری است که این نظریه نیز مشکل معرفت‌شناختی بناسراف را کاملاً حل نکرد. گیدئون روسن (Gideon Rosen) پذیرفت افلاطونیسم مشکل معرفتی دارد. اما معتقد بود باید ریاضیات را «داستانی مفید» دید (Rosen, 1993). چارلز پارسونز (Charles Parsons) معتقد است شناخت ریاضی از طریق درک ساختارها ممکن است. بنابراین شک بناسراف به معرفت ریاضی بیش از حد بدبینانه است (Parsons, 1990). مارک کولیوان (Mark Colyvan) معتقد است حتی اگر مشکل معرفتی بناسراف وجود داشته باشد کاربرد موفق ریاضیات در فیزیک آن را توجیه می‌کند (Colyvan, 2002). اویستن لینهو (Øystein Linnebo) اعتقاد دارد مسئله‌ی بناسراف قابل اعتنا است اما می‌توان با افلاطون‌گرایی ضعیف از آن عبور کرد و آن را نادیده گرفت (Linnebo, 2020). به مقاله‌ی ۱۹۷۳ تا کنون ۲۱۸۰ بار در آثار منتشرشده توسط سایر نویسندگان و فلاسفه استناد شده است. این تعداد ارجاع به یک مقاله در حوزه‌ی فلسفه قابل تأمل است و نشان از تأثیر و جایگاه آن دارد.

۶. نتیجه‌گیری

پُل بناسراف چندین تحول مهم ایجاد کرد. او باعث شد معرفت‌شناسی ریاضی به مرکز فلسفه ریاضی تبدیل شود و ساختارگرایی رشد کند. همچنین، باعث تقویت نومینالیسم^۳ مدرن شد و فلسفه ریاضی را به متافیزیک و فلسفه ذهن پیوند داد. باید به این نکته توجه کرد هنوز هیچ پاسخ قطعی‌ای برای پرسش بناسراف وجود ندارد: چگونه ذهن فیزیکی انسان به صدق‌های انتزاعی و ضروری ریاضی دسترسی پیدا می‌کند؟ این پرسش هنوز هم یکی از عمیق‌ترین مسائل فلسفه تحلیلی است. مقالات او اثری انقلابی در فلسفه ریاضیات داشت. بناسراف نشان داد که توضیح صدق ریاضی کافی نیست، بلکه باید توضیح دهیم انسان چگونه به این صدق‌ها معرفت پیدا می‌کند. او استدلال کرد افلاطون‌گرایی صدق را توضیح می‌دهد اما معرفت را نه، و نومینالیسم معرفت را توضیح می‌دهد اما صدق را نه. این تعارض، یعنی «مسئله بناسراف»، هنوز هم یکی از مسائل بنیادین فلسفه معاصر است.

پی‌نوشت‌ها

۱. فیکشنالیسم دیدگاهی فلسفی است که می‌گوید لازم نیست باور داشته باشیم چیزی واقعاً وجود دارد بلکه کافی است برای اهداف عملی یا نظری به مثابه‌ی یک انسان با آن رفتار کنیم.
۲. استدلال اجتناب‌ناپذیری پلی میان فلسفه علم و فلسفه ریاضیات است. در این استدلال بیان می‌شود اگر علم به چیزی نیاز دارد، فلسفه نیز باید آن را بپذیرد. برای مثال، شما نمی‌توانید علم آمار را بپذیرید ولی بگویید هیچ عددی وجود ندارد. استدلال اجتناب‌ناپذیری کواین بر این استوار است که این موضع ناسازگار است زیرا علمی را پذیرفته‌اید که بدون اشیای ریاضی قابل بیان نیست. این استدلال همچنین استدلال کواین-پاتنم نیز نامیده می‌شود.
۳. نومینالیسم دیدگاهی فلسفی است که می‌گوید مفاهیم کلی واقعیت مستقل و جدا از افراد ندارند بلکه فقط نام‌ها یا برچسب‌هایی هستند که برای گروهی از اشیای مشابه بکار برده می‌شوند.

کتاب‌نامه

- Balaguer, M. (1998). *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford University Press.
- Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *The Philosophical Review*, 74(1), 47-73.
- Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. *The Journal of Philosophy*, 70(19), 661-679.

- Benacerraf, P. and Putnam, H. (1983). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings (second Edition)*, Cambridge University Press.
- Colyvan, M. (2002). Mathematics and aesthetic considerations in science, *Mind*, 111 (441), 69-74.
- Field, H. (2016). *Science without Numbers*, Oxford University Press.
- Linnebo, Ø. (2020). *Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press.
- Maddy, P. (1997). *Naturalism in Mathematics*, New York: Oxford University Press.
- Michael Resnik (1981). Mathematics as a Science of Patterns, *Noûs*, 15(4), 529-550
- Parsons, C. (1990). The structuralist view of mathematical objects, *The Philosophy of Mathematics*, Part II, 84(3), 303-346.
- Quine, W. (1976). *The Ways of Paradox, and other Essays*, Cambridge: Harvard University Press.
- Rosen, G. (1993). A Problem for Fictionalism about Possible Worlds, *Analysis*, 53 (2), 71-81.
- Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford University Press.
- Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics: the philosophy of mathematics*, New York: Oxford University Press.
- Shapiro, S. (2007). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*.