

Mathematical certainty: Inference and calculation practice

Gholamhossein Moghaddam Heidari*

Abstract

The study of the certainty and inexorability of mathematical theorems is one of the important topics in the philosophy of mathematics. Various schools such as logicism, intuitionism, Platonism and naturalism have tried to present theories on this subject. These schools usually seek the foundation for mathematics in order to justify the certainty of mathematical theorems and logic. This has always been accompanied by numerous failures. In this article, we try to examine this issue from Wittgenstein's point of view. That is, instead of asking "What is the foundation of logic and mathematics?" we ask "Why does mathematics need the foundation?". Therefore, we first examine foundationalism. Then we show that mathematics is a language-game. In this regard, we examine geometry and logic as two language-games in mathematics. Finally, we show that, according to Wittgenstein's philosophy, the certainty and inexorability of a valid inference or a correct calculation comes from the practical procedure of inference and calculation.

Keywords: Wittgenstein, practice, philosophy of mathematics, language-game, foundationalism

Introduction

The question "Where does the certainty of logical and mathematical propositions come from?" has been the central preoccupation of the philosophy of mathematics. Logicism (Frege, Russell) sought to reduce mathematics to logic, thereby grounding

* Professor of Philosophy of Science and Technology Department, Institute for Humanities and Cultural Studies, Tehran, Iran, gmheidari@gmail.com

Date received: 27/11/2025, Date of acceptance: 31/01/2026



its certainty in the apparent indubitability of logical truths. Intuitionism (Brouwer) located the foundation in basic mental constructions, arguing that mathematical objects are products of intuitive temporal processes. Platonism posits a mind-independent realm of abstract entities, making mathematical truth a matter of discovery rather than invention. Naturalism treats mathematics as continuous with empirical science, justifying its claims through their overall role in successful theories. Despite their differences, these schools share a foundationalist assumption: that the certainty of mathematics must be justified by appealing to a privileged class of basic, self-evident beliefs or entities. However, as we show, each programme faces insurmountable difficulties—regress problems, circularity, or the inability to account for the actual practices of mathematicians. This paper, therefore, proposes a radical shift: instead of seeking a foundation, we investigate why mathematics is thought to need one. Drawing on Wittgenstein's later philosophy, we argue that the search for a foundation is itself a grammatical misunderstanding. Mathematics, like any language-game, is not a structure built upon a base; it is an activity embedded in our form of life. Its certainty is not derived from something external but is exhibited in the way we use its rules. Our aim is to articulate this practice-based view and to show how it resolves the puzzle of mathematical necessity without metaphysical commitments.

Materials and Methods

This study is a philosophical analysis, not an empirical experiment. Our method consists of a critical reinterpretation of Wittgenstein's later works, primarily *Philosophical Investigations*, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, and *On Certainty*, combined with a historical and comparative examination of foundationalist projects. We adopt the following conceptual tools:

Language-game: we treat mathematics as a multiplicity of language-games, each with its own vocabulary and rules. A language-game is a rule-governed activity that is learned and practiced in a community.

Rule-following: we analyse the notion that obeying a rule is a practice. A rule cannot be a private mental object; it is publicly taught, learned, and applied in repeated situations.

Grammar: we distinguish between empirical propositions (which can be true or false) and grammatical rules (which determine what counts as a meaningful statement

and what counts as a valid inference). Questions about the truth of rules are category mistakes.

To illustrate our method, we examine two case studies:

1. Geometry as a language-game: we reconstruct Hilbert's axiomatic method as a paradigmatic example. Hilbert's primitive terms (point, line, plane) receive their meaning solely through the axioms, which function as rules for manipulating symbols. By changing a single axiom (the parallel postulate), we obtain new, consistent language-games (Euclidean vs. hyperbolic geometry). This shows that geometry is not about a pre-existing spatial reality but about a formal system whose "truth" is replaced by consistency and usability.
2. Logic as a language-game: we analyse propositional logic, with its vocabulary (sentence letters, connectives) and rules (modus ponens, double negation, non-contradiction). We argue that logical rules are not discovered a priori but are constitutive of what we call "reasoning". They are part of the normative framework of our inferential practices.

Additionally, we employ comparative anthropological data (Lévy-Bruhl on the Ipon tribe; counting practices in the Torres Strait) to demonstrate that alternative inferential and computational practices exist, which suggests that our logical and mathematical rules are contingent upon our social forms of life rather than being universally necessary.

Discussion and Results

Our analysis reveals that foundationalism fails because it mistakes the grammatical status of rules for the propositional status of factual claims. When we ask for the justification of modus ponens or of the principle of non-contradiction, we are trying to measure our measuring rod. The certainty of these rules is not a property of their correspondence with reality; it is a reflection of their role as standards of correctness within the practice of inference. Wittgenstein explicitly states: "Inference is part of a language-game. And the person who makes logical inferences follows certain instructions that have been given to him in learning the language-game" (RFM, p. 378). Thus, the "hardness" of logic is not a metaphysical necessity but a pragmatic one: we call something "valid inference" only if it conforms to these rules. This is analogous to using a metre stick: we cannot question the correctness of the metre

stick itself in the same way we question the length of a table, because the metre stick is the standard by which correctness is determined.

The two case studies support this conclusion. In geometry, the shift from Euclidean to non-Euclidean systems shows that no axiom is intrinsically certain; its role is determined by the game we choose to play. The consistency of the system is all that matters for internal validity. In logic, the law of non-contradiction is not a high-level empirical generalisation; it is a rule that tells us when to stop playing—it signals that a contradiction has arisen and we cannot continue with the same moves. As Wittgenstein notes, “Contradiction can only occur among the rules of a game” (Notebooks, p. 321). Its force is not ontological but procedural.

Our anthropological examples further illustrate that alternative practices are entirely coherent within their own contexts. The Ipon tribe do not infer death from a wound in the way we do; they invoke sorcery. This does not mean they are irrational; they are following a different set of rules for explanation. The Torres Strait counting method is not an inferior version of our arithmetic; it is a different practical technique for enumeration. These examples underscore that what we call “necessary” is only necessary relative to the practices we have adopted. There is no trans-cultural, trans-historical foundation for arithmetic or logic; there is only the practical skill and shared training that enable us to count and infer in the ways we do.

Consequently, the certainty of a valid inference or a correct calculation derives from our trust in the practice—our confidence, built through repeated successful applications, that following the rules will lead to a determinate outcome. This is not a blind faith but a trained ability. As Wittgenstein puts it: “I examine the proof and then accept its result. That is simply what we do. This is a custom and a practice among us, or a fact of our natural history” (RFM, p. 61). The “inexorability” of mathematics is therefore not a property of the propositions themselves but of our commitment to the practice.

Conclusion

We conclude that the traditional foundationalist project for mathematics is misconceived. The later Wittgenstein offers a viable alternative: mathematics is a language-game, and its rules are not in need of external justification because they are constitutive of the activity of reasoning and calculating. The certainty and inexorability that we attribute to mathematical and logical propositions arise from

the grammatical role these rules play within the practical procedure (practice) of inference and computation. This certainty is a form of practical trust and skill, not a reflection of metaphysical necessity. Our analysis shows:

1. The demand for a foundation stems from a grammatical error: confusing a rule with a proposition that can be true or false.
2. Hilbert's axiomatic geometry and classical logic are best understood as language-games with their own internal standards of correctness; these standards are arbitrary in the sense that they could be different, but they are not arbitrary in the sense that they are freely chosen by individuals—they are embedded in our shared forms of life.
3. The “hardness” of logic and mathematics is the hardness of the practice itself; it is the result of our training and the social consensus that sustains the practice.
4. We do not need a foundation to justify mathematics; we need a clarification of its grammar. The task of philosophy is not to reform or justify mathematics but to describe what mathematicians actually do and how their practices hang together.

In sum, the paper provides a robust Wittgensteinian response to the problem of mathematical certainty, showing that the practice-based approach dissolves the classical foundationalist anxieties without reducing mathematics to mere convention. It invites philosophers and mathematicians to abandon the search for an indubitable ground and instead to appreciate the rich, dynamic, and socially embedded character of mathematical activity.

Bibliography

- Alavinia, Sohrab (2001) *The Epistemology of Mathematics of Wittgenstein and Quine*, Niloufar Publications. (in Persian)
- Alavinia, Sohrab (2004) “Set-Theoretic Naturalism as the Foundation of Mathematics”, *Maqālāt va Barrasīhā (Articles and Reviews)*, Issue 75 (2). (in Persian)
- Bayat, Hossein (2018) “A Critique and Evaluation of New Mathematical Platonism”, *Philosophical Researches*, Vol. 12, No. 23. (in Persian)
- Lévy-Bruhl, Lucien (2010) *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*, translated by Yadollah Mowqen, Hermes Publications. (in Persian)
- Dummett, Michael (2014) *Philosophy of Mathematics*, translated by Morteza Qaraee Garakani, Hekmat Publications. (in Persian)

- Brouwer, L. E. J. (1997) "Intuitionism and Formalism", translated by Mohammad Ardeshir, Nashr-e Riyazi, Vol. 9, No. 1. (in Persian)
- van Atten, Mark (2008) Brouwer's Philosophy, translated by Mohammad Ardeshir, Hermes Publications. (in Persian)
- Wittgenstein, Ludwig (1953, 3rd ed. 1989) Philosophical Investigations, translated by G. E. M. Anscombe, Blackwell.
- Wittgenstein, Ludwig (1998a) Remarks on the Foundations of Mathematics, edited by G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe, translated by G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford.
- Wittgenstein, Ludwig (1969) On Certainty, edited by G. E. M. Anscombe and G. H. von Wright, Basil Blackwell, Oxford.
- Wittgenstein, Ludwig (1998b) Notebooks 1914–1916, 2nd ed., edited by G. H. von Wright and G. E. M. Anscombe, translated by G. E. M. Anscombe, Blackwell.
- Hacker, P. M. S. (2011) "Forms of Life and Language Games", in Forms of Life and Language Games, edited by Jesús Padilla Gálvez and Margit Gaffal, Ontos Verlag, Frankfurt a. M.
- Pollack, John L. (1986) Contemporary Theories of Knowledge, Rowman & Littlefield Publishers, USA.

یقین ریاضی: روال عملی استنتاج و محاسبه

غلامحسین مقدم حیدری*

چکیده

بررسی قطعیت و صلابت قضایای ریاضی یکی از موضوعات مهم در فلسفه ریاضی است. مکاتب مختلفی همچون منطق‌گرایی، شهودگرایی، افلاطون‌گرایی و طبیعت‌گرایی کوشیده‌اند تا نظریه‌هایی در این باره ارائه کنند. این مکاتب معمولاً به دنبال مبنایی یقینی برای ریاضیات هستند تا به این روش قطعیت قضایای ریاضی و منطق را توجیه کنند که این کار همواره با ناکامی‌های متعددی همراه بوده است. در این مقاله می‌کوشیم تا این موضوع را در پرتو آرای ویتگنشتاین متاخر بررسی کنیم. یعنی به جای اینکه بپرسیم «مبنای منطق و ریاضیات چیست؟» سوال کنیم «چرا ریاضیات به مبنا نیاز دارد؟» از این رو پس از بررسی مبنای نشان می‌دهیم که بر اساس آرای ویتگنشتاین، ریاضیات به مثابه یک بازی-زبان چه معنایی دارد. در این جهت هندسه و منطق را به منزله دو بازی-زبان در ریاضیات بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که یقین ما به قواعد و احکام ریاضی، نه از بنیان‌های استوار، بلکه از نقش گرامری قواعد در روال عملی استنتاج و محاسبه ناشی می‌شود که نشانه اعتماد عملی و مهارت ما برای شرکت در این روال است.

کلیدواژه‌ها: ویتگنشتاین، روال عملی (پراگماتیک)، فلسفه ریاضی، بازی-زبان، مبنایگرایی.

* استاد گروه فلسفه علم و تکنولوژی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، تهران، ایران،
gmheidari@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۰۶، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۱۱



۱. مقدمه

شاید بتوان گفت که پرسش «قطعیت قضایای منطق و ریاضی از کجا می آید؟» مهمترین پرسش فلسفه ریاضی است که مکاتب گوناگون کوشیده اند به آن پاسخ دهند. منطق‌گرایان تلاش کردند تا مبنای ریاضیات را بر منطق قرار داده و بدین گونه نشان دهند که قطعیت قضایای ریاضی از صلابت و تغییرناپذیری اصول و قضایای منطق نشأت می گیرد. فرگه تا آنجا پیش رفت که «همه حقیقت های حساب را می توان تنها از منطق برآورد. حساب فقط شاخه‌ای از منطق بود؛ پایه و بنیاد ضرورت حقیقت های حساب همان ضرورت حقیقت های منطقی بود» (دامت، ۱۳۹۳، ص ۵۴) شهودگرایان مبنای ریاضیات را بر فرایندهای ذهنی قرار دادند و با این فرض که این فرایندها را هر انسانی در وجود خود در می یابد، سعی کردند مبنای یقینی برای ریاضیات بسازند. براوئر معتقد بود:

از دیدگاه فعلی شهودگرایی همه مجموعه های آحاد ریاضی می توانند از شهود بنیادی برآیند و این کار فقط با ترکیب دو عمل زیر در تعداد متناهی دفعه انجام می پذیرد: خلق یک عدد ترتیبی متناهی و خلق عدد ترتیبی نامتناهی ω (براوئر، ۱۳۷۶، ص ۳۰)

البته فان آتن متذکر می شود که

شهودی یا داده شده از نظر براوئر به این معناست که هیچ واسطه ای، بویژه در شکل زبان(منطق)، در کار نیست؛ اما به این معنا نیست که بی چون و چراست. بنابراین به نظر من بهترین راه تعبیر شناخت شناسی (epistemology) براوئر این است که آن را در قالب آنچه این روزها به مبانی گرایی خطاپذیر (fallibilist foundationalism)^۱ معروف شده است، ارائه کرد (فان آتن، ۱۳۸۷، ص ۴۰)

از نظر افلاطون‌گرایان

اشیاء، خاصه‌ها و روابط ریاضیاتی کاملاً واقعی‌اند، یعنی اولاً موجودند و ثانیاً وجودشان مستقل از ذهن یا آگاهی ما است. بر این اساس، به لحاظ واقعی بودن، فرقی بین یک درخت و عدد ۷ نیست. به بیان دیگر، ما اعیان ریاضی، یعنی اشیاء ریاضی (از جمله اعداد، اشکال، مجموعه‌ها، و ساختارها) و خواص آنها و روابط بین آنها، را خلق نمی‌کنیم بلکه کشف می‌کنیم. (بیات، ۱۳۹۷، ص ۷)

صدق گزاره های ریاضی، نه وابسته به ساختار ذهن ماست و نه وابسته به زبانی که برای بیان آن به کار می‌بریم بلکه مبتنی بر واقعیت عینی موجودات ریاضی است و از این

رو قطعی هستند. طبیعی گرایان، ریاضیات را بخشی از علوم تجربی می دانند. بنابراین وقتی یک نظریه با یافته های تجربی تأیید می شود، کل آن نظریه و از جمله ریاضیاتی که در آن به کار رفته، مورد تأیید قرار می گیرد. از نظر آنان ما در توجیه باور خود به اجزاء ریاضی یک نظریه، به همان شواهدی متوسل می شویم که برای تبیین اعتقاد به بخش های تجربی آن مطرح می کنیم. (علوی نیا، ۱۳۸۳، ص ۳۱)

آموزه ای که معمولاً در اغلب نظریه پردازی های فلسفی از این دست می توان مشاهده کرد این است که برای توجیه قطعیت قضایای ریاضی در جستجوی مبنایی یقینی و تغییرناپذیر برای آن هستند. و از این حیث در ذیل نظریه های مبنیگرا قرار می گیرند. نظریه های مبنیگرا نظریه هایی هستند که «دسته ای محدود از باورهای "از نظر معرفت شناسی پایه ای" را برای داشتن وضعیت معرفتی مرجح ارائه می کنند» (Pollock, 1986: p 26). بطوریکه این باورهای پایه ای نیازی به توجیه نداشته بلکه "خود توجیه گر" اند. توجیه باورهای دیگر به کمک استدلال و برهان، همگی بر اساس این باورها انجام می شود. بنابراین باورهای پایه ای مبنایی برای توجیه معرفتی فراهم می کنند. بنابراین مبنیگرایی را می توان بصورت زیر توصیف کرد:

باورهای توجیه شده ما ساختاری را تشکیل می دهند که برخی باورهای آن (مبناها) بوسیله چیزی بیش از ارتباط آنها با باورهای توجیه شده دیگر توجیه می شوند. باورهایی که بوسیله ارتباطشان با باورهای دیگر توجیه شده اند همگی برای توجیه شان به مبناها وابسته اند (Alston, 1976: p 165).

تامل در نظریه های مبنیگرا نشان می دهد که «ویژگی مشترک همه اشکال مبنیگرایی این است که یک باور می تواند بطور غیر استنتاجی توجیه شود یعنی توجیه آن به اینکه از برخی باورهای توجیه پذیر (یا توجیه ناپذیر) دیگر استنتاج شود وابسته نیست» (Bergmann, 2004, p 162). بر اساس چنین رویکردی نظام باورهای ما به شکل یک هرم است که قاعده آن را باورهای پایه ای تشکیل می دهند که با رفتن به سوی راس آن باورهای دیگر براساس باورهای پیشین و آنها هم به نوبه خود از باورهای پایه ای بدست می آیند. همانطور که با ثبات ترین حالت یک هرم وقتی است که بر قاعده آن قرار گرفته است، پایدارترین نظام ها نظامی است که بر باورهای پایه ای بنا شده باشد. چنین بنایی هیچگاه به لرزش در نخواهد آمد. اما این باورها از چه نوع هستند؟ برخی اوقات این باورها

یکسری ادراکات بی واسطه اند که بطور شهودی و مستقیم، به درستی آنها آگاهی داریم. در موارد دیگر داده های حسی هستند که نمی توان در آنها شک و تردید کرد.

مبناگرایی یکی از قدیمی ترین و رایج ترین شیوه های تفکر در ریاضیات و مبانی و چیستی آن است. منطق گرایان مبنای ریاضیات را اصول منطق به عنوان باورهای خودتوجیه گر- در نظر می گیرند. شهودگرایان شهود پایه-دویت- را مبنای یقینی ریاضی تلقی می کنند. افلاطون گرایان با متعلق دانستن اعداد به یک جهان عینی، آن را مبنای قطعیت اعیان و قضایای ریاضی می دانند. برخی هم با مبنا گرفتن مجموعه ها به عنوان مبنایی برای ریاضیات، می کوشند تا تعبیری طبیعت گرایانه از آن ارائه کنند.

در هر حال مبناگرایی شامل آموزه های مختلفی همچون

استدلال بر پایه یک یا چند اصل غیر قابل ابطال، ادعایی برای قطعیت، تاکید بر فاعل شناسا (یا ذهنیت) به عنوان نشانه و سرنخی برای عینیت (یا ادعاهایی برای شناخت عینی) و یا حتی توانایی فرض شده برای تشخیص شرایط امکان معرفت (Rockmore, 2004: p 46)

است. حال این پرسش مهم مطرح می شود که ما چه زمانی به دنبال مبنا می گردیم؟ با کمی تامل در می یابیم که وقتی معرفت در حوزه خاصی را به مجموعه ای از گزاره ها که صادق یا کاذبند محصور کنیم آنگاه به دنبال توجیه صدق یا کذب آنها، به سوی گزاره های مبنایی رهنمون می شویم که خود توجیه پذیرند. وقتی جستجوی ما به مبنایی سخت می رسد پایان می پذیرد و بدین گونه می توانیم به دور از نگرانی پژوهش های بعدی خود را بر آن گزاره های بنیادی بنا کنیم.

در حالیکه می توان شیوه «جستجوی مبنا» برای ریاضیات را مورد پرسش قرار داد و پرسید چرا برای توجیه قطعیت قضایای ریاضی باید به مبنایی یقینی برای آن متوسل شد؟ در این مقاله می کوشیم که به این پرسش در پرتو رویکرد ویتگنشتاین متاخر پاسخ دهیم. از این رو در ابتدا نشان می دهیم که ریاضیات یک بازی زبان است. بدین منظور هندسه و منطق را به منزله دو بازی زبان در ریاضیات بررسی می کنیم و سپس نشان می دهیم که قطعیت قواعد بازی زبان ها، از جمله ریاضیات، نیازمند مبنایی یقینی نیست بلکه این قطعیت از روال عملی (practice) استنتاج و استدلال در منطق و ریاضیات بر می آید.

۲. ریاضیات به مثابه بازی-زبان (language-game)

از نظر ویتگنشتاین «بالا تر از هر چیز زبان وسیله ارتباط است و در مرتبه دوم وسیله بازنمایی است» (Hacker, 2011, p 19) البته باید توجه داشت که همه ارتباط های زبانی مستلزم بازنمایی نیستند. از این رو «یادگیری یک زبان یعنی اینکه فرد عضو شرکت کننده در یک فرهنگ بشود.» (Ibid, p 2) هر بازی-زبان دارای دو وجه مهم است: واژگان و قواعد (rules). از نظر ویتگنشتاین «معنای یک کلمه بکارگیری آن در زبان است» (Wittgenstein, 1953, p 43) یک واژه دارای معنای ذاتی نیست بلکه وقتی مطابق قاعده های یک زبان بکار گرفته می شود معنا می یابد. آنچه که در تشخیص یک قاعده از چیزهای دیگر باید به آن توجه کرد این است که آنچه پیروی از قاعده نامیده می شود چیزی نیست که فقط یک نفر و فقط یکبار در عمرش انجام دهد. قاعده چیزی است که شما می توانید آن را یاد بگیرید و به دیگران بیاموزید. بنابراین قاعده چیزی است که شما و دیگران می توانید مکرراً از آن پیروی کنید.

امکان ندارد که فقط یک موقعیت وجود داشته باشد که در آن کسی از یک قاعده پیروی کرده باشد. امکان ندارد که فقط یک موقعیت بوده باشد که در آن گزارشی داده شده باشد، دستوری داده یا فهمیده شده باشد و غیره (Wittgenstein, 1953, p 199).

در واقع «پیروی از یک قاعده» یک روال عملی است» ('obeying a rule' is a practice) (Wittgenstein, 1953, p 202) که فرد در گیر در یک بازی-زبان بدان شیوه عمل می کند. در اینجا باید به دو نکته مهم توجه کرد:

- قاعده به دلیل نقش گرامری خود نیازمند توجیه نیست.

- پیروی از قاعده پراکتیسی فردی نیست بلکه اجتماعی است.

حال اگر ریاضیات را به مثابه یک بازی-زبان تلقی کنیم خواهیم دید که تسلط و مهارت در ریاضی یعنی یادگیری این که ما در بازی-زبان استدلال و استنتاج ریاضی چگونه باید حرکت کنیم. بکارگیری یک واژه یا یک جمله یعنی انجام چنین حرکتی. از این رو تسلط بر یک مفهوم ریاضی، تسلط بر تکنیک بکارگیری آن مفهوم در بازی-زبان ریاضی است. برای روشن شدن موضوع بازی-زبان هندسه و منطق را بررسی می کنیم.

۱.۲ بازی-زبان هندسه

گرچه شاید نتوان گفت که صورتگرایی هیلبرت در ریاضیات دقیقاً مطابق مفهوم بازی-زبان از منظر ویتگنشتاین است اما می‌توان اذعان داشت که هیلبرت کسی بود که برای اولین بار نمایی از ریاضیات ارایه کرد که آن را همچون یک بازی-زبان می‌می‌توان تلقی کرد. هیلبرت کوشید تا مفاهیم و واژگان و قواعد و اصول موضوعه بازی-زبان هندسه را بیان کند او در کتاب مبانی هندسه (۱۸۹۹) چنین می‌گوید:

سه مجموعه از چیزهای جدا از هم را در نظر بگیرید. فرض کنید اشیای مجموعه اول نقاط نامیده شوند و با A, B, C و... نشان داده شوند. فرض کنید اشیای مجموعه دوم خطوط نامیده شوند و با a, b, c و... نمایش داده شوند. فرض کنید اشیای مجموعه سوم صفحات نامیده شوند و با حروف یونانی α, β, γ و... نمایش داده شوند. ما فکر می‌کنیم نقاط، خطوط، و صفحات ارتباطات دو به دو معینی با هم دارند که ما با کلمات "قرار دارند بر"، "بین"، "موازی"، "انطباق" و "پیوستگی" و غیره بیان می‌کنیم. توصیف کامل و دقیق این ارتباط‌ها به عنوان دنباله‌ای از اصول موضوعه هندسه در پی می‌آیند. (Hilbert, 1950, p.2)

سپس هیلبرت به بیان این اصول می‌پردازد که به پنج گروه تقسیم شده‌اند: وقوع (Incidence)، میانبود (Betweenness Order) Axiom، قابلیت انطباق (Congruence)، پیوستگی (Continuity) و توازی (Parallels). در واقع هیلبرت تعریف واژگان نقطه، خط و صفحه را با قواعدی که به آن اصول موضوعه هندسه می‌گوید تعریف می‌کند.

اگر خود را به اصول بالا محدود کنیم تنها می‌توانیم قسمتی از هندسه اقلیدسی را بسازیم که به هندسه نتاری (Neutral Geometry) معروف است. یادگیری هندسه نتاری یعنی یادگیری بازی-زبان آن. به عبارت دیگر یادگیری صورتبندی و اثبات قضایای این هندسه، مطرح کردن مسایل جدید در هندسه نتاری و حل و اثبات آن‌ها بر اساس قواعد این هندسه و شیوه‌های استنتاج ریاضی.

یادگیری هندسه نتاری یعنی اینکه چگونه با شبکه واژگان آن کار کنیم و این در گرو آموختن این است که چگونه در بازی زبان هندسه هندسه‌دانان دانشکده ریاضی درگیر شویم. یعنی بکارگیری واژگان هندسه با اعمال قاعده مندی احاطه شده که می‌توان آن‌ها را چنین برشمرد: تصحیح اشتباه‌ها، بیان آنچه معنی می‌دهد، واکنش‌های مناسب به بکارگیری صحیح واژگان و قواعد، نشان دادن فهمیدن یا بد فهمیدن و یا نفهمیدن.

یقین ریاضی: روال عملی استنتاج و محاسبه (غلامحسین مقدم حیدری) ۶۳

حال اگر به این بازی-زبان قاعده دیگری به نام اصل توازی را اضافه کنیم بازی-زبان ما گسترش می یابد و به بازی-زبان هندسه اقلیدسی می رسیم. مطابق این اصل داریم:

اصل موضوعه توازی: به ازای هر خط L و هر نقطه P ناواقع بر آن حداکثر یک خط m وجود دارد چنانکه از P می گذرد و با L موازی است.

حال اگر این اصل را با اصول دیگری جابجا کنیم می توانیم به هندسه های نا اقلیدسی دست یابیم و بازی-زبان های جدیدی را برپا کنیم. لباچفسکی اصل موضوعه جدیدی را با نام «اصل موضوعه هذلولوی» جایگزین اصل موضوعه توازی کرد. مطابق این قاعده جدید داریم:

اصل موضوعه هذلولوی: یک خط L و یک نقطه P غیر واقع بر L وجود دارد چنانکه دست کم دو خط موازی با L از نقطه P می گذرند.

با اضافه کردن این قاعده لباچفسکی بازی-زبان سازگار جدیدی در هندسه بوجود آورد که هندسه هذلولوی نام گرفت.

با توجه و دقت در اصول موضوعه هیلبرت در می یابیم که مفاهیم اولیه از قبیل صفحه، خط و نقطه که در فرضها ظاهر می گردند به طور ضمنی به وسیله این اصول موضوعه، که در حکم قواعد بازی هستند و انگار بما می گویند چگونه باید بازی کرد، تعریف می شوند به عبارت دیگر تنها ارتباط صوری میان دلالت کننده ها مورد علاقه ما هستند. این نماد های هندسی کاملاً مجرد هستند و بر چیزی از دنیای واقعی دلالت نمی کنند. یعنی ارتباطی ذاتی میان دال و مدلول (آن گونه که در هندسه اقلیدسی بیان می شود) وجود ندارد بلکه ما بطور دلخواهی می توانیم میان آن ها ارتباط برقرار کنیم. هندسه از پرتوهای نور صحبت نمی کند، ولی مسیر یک پرتو نور ممکن است تعبیر مادی از نماد مجرد «خط» باشد. آموزه اصلی هیلبرت را می توان در این گفته او دید: «آدمی باید همیشه به جای نقطه و خط و صفحه بتواند میز و صندلی و لیوان آبجو بگوید».

در روش هیلبرت به جای اینکه بگوییم: «دو نقطه فقط یک خط را مشخص می کنند» می توانیم بگوییم: « A و B فقط یک a را مشخص می سازند» با وجود تغییری که در اصطلاحها داریم باز هم اثبات همه قضایای ما معتبر خواهند ماند؛ زیرا اثبات های درست به شکل و نمودار بسته نیستند بلکه فقط به اصول موضوعه ای که وضع شده اند و به قواعد

منطق بستگی دارند. بنابراین "اثبات" دنباله ای از فرمولهای نظریه ای صوری است که با استفاده از قواعد منطق از اصول و احکام آن نظریه استنتاج شده اند. ریاضیات احکامی می سازد به صورت «هرگاه چنین باشد، آنگاه چنان می شود» و اساساً در آن صحبتی از معنای فرضها یا راست بودن آنها نیست. برنیاس (Bernias) یکی از ریاضی دانان همکار هیلبرت در این مورد می گوید:

به هیچ روشی، اصول موضوعه قابل داوری نیستند که بتوان گفت درست یا نادرست هستند. حتی سیستم اصل موضوعی به عنوان یک کل نمی تواند بیانی از یک حقیقت را بسازد... پس خود سیستم اصل موضوعی نمی تواند چیزی واقعی را بیان کند آن تنها شکل ممکن از سیستمی از ارتباطات را بیان می کند که باید از نظر ریاضی مطابق ویژگی های درونی اش مورد پژوهش قرار گیرد. (Mancosu, 1998, p151).

یعنی به جای صحبت از درستی یا نادرستی یک حکم باید از سازگاری دستگاه اصل موضوعی که ساخته ایم بحث شود. منظور از سازگاری یک دستگاه اصل موضوعی آن است که هیچوقت دو قضیه متناقض (قضیه ای به شکل $p \& \neg p$) از این اصول استنتاج نشود. به عبارت دیگر قضایای این دستگاه از قواعد منطق پیروی کنند. اما این قواعد منطق چه چیزهایی هستند؟ آیا آن ها قواعد جهانشمول حاکم بر ذهن ما انسان ها هستند؟ در بخش بعد نشان می دهیم که منطق نه یک امر پیشینی حاکم بر ذهن ما بلکه یک بازی-زبان هست.

۲.۲ بازی-زبان منطق

از نظر ویتگنشتاین «استنتاج منطقی بخشی از یک بازی-زبان است. و کسی که در بازی-زبان ای استنتاج های منطقی انجام می دهد، از دستورالعمل های خاصی پیروی می کند که در یادگیری عملی بازی-زبان به او داده شده است.» (Wittgenstein, 1998a, sec 23) در اینجا منطق درجه اول را در نظر می گیریم. نظام منطق جمله ها یک زبان صوری هست. برای ساختن این زبان باید دو نکته را رعایت کرد:

- مجموعه نشانه هایی را که جمله های زبان از آن ها ساخته می شوند
- قاعده هایی که برای پشت سرهم نهادن نشانه ها برای ساختن جمله های آن بکار می رود.

یقین ریاضی: روال عملی استنتاج و محاسبه (غلامحسین مقدم حیدری) ۶۵

جمله‌هایی را که بر اساس این قاعده‌ها ساخته شده باشند جمله‌های درست ساخت می‌نامیم. (موحد۶۷) حال بر اساس این دستور العمل می‌توان بازی-زبان منطق جمله‌ها را طراحی کرد:

واژگان

- جمله نشانه‌ها: علامت‌ها و وابسته‌های زیر هستند:

$P, Q, R, S, \dots$

هر یک از این نشانه‌ها یک گزاره را نشان می‌دهد

- ادات‌های منطقی:

(و-ترکیب عطفی) $\wedge$, (یا-ترکیب فصلی) $\vee$, (دو شرطی) $\leftrightarrow$, (شرطی) $\rightarrow$, (نقیض) $\sim$

قواعد

برخی از مهمترین قواعد منطق عبارتند از: قاعده نقض مضاعف، قاعده وضع مقدم، قاعده رفع تالی، قاعده دلیل شرطی، قاعده اینهمانی، قاعده طرد شق ثالث، قاعده عکس نقیض، قاعده امتناع تناقض (Law of noncontradiction). یک استدلال ریاضی یا فلسفی وقتی درست تلقی می‌شود که بتوان طی سطرهای متناهی با استفاده از قواعد فوق نتیجه را از فرض‌های استدلال نتیجه گرفت. یکی از مهمترین این قواعد قاعده امتناع تناقض هست. اهمیت این قاعده از آن رو است که اگر در استدلالی به گزاره $P \& \sim P$ برسیم آنگاه کل استدلال نامعتبر تلقی می‌شود. از این رو این قاعده را یکی از بدیهیات می‌شمارند که قطعیت و یقینی بودن آن هیچ استدلالی را نمی‌طلبد. حال آنکه اگر از منظر ویتگنشتاین به منطق بنگریم منطق فقط یک بازی-زبان است و قواعد آن قواعد یک بازی هستند و نه اصول جهانشمول حاکم بر جهان و ما.

قواعد تنها دستورالعمل‌هایی برای این هستند که چگونه بازی کنم و تا زمانی که بتوانم بازی کنم آنها باید درست باشند. فقط زمانی آنها از درست بودن می‌افتند که متوجه می‌شوم آنها ناسازگارند و تنها نشانه آن این است که دیگر نمی‌توانم آن‌ها را بکار ببرم. برای اینکه تولید منطقی دو قاعده یک تناقض هست و این تناقض دیگر به من نمی‌گوید که چه کار کنم. بنابراین تناقض فقط زمانی بروز می‌کند که متوجه آن می‌شوم. اگر می‌توانستم بازی کنم، مشکلی وجود نداشت. (Wittgenstein, 1998b, p322)

بطور خلاصه می‌توان گفت که تناقض دارای دو ویژگی مهم هست:

- «تناقض فقط می تواند در میان قواعد بازی رخ دهد» (Wittgenstein, 1998b, p321)
- تناقض وقتی رخ می دهد که مطابق قواعد بازی، دیگر راهی برای ادامه دادن بازی وجود ندارد.

در این صورت اصل عدم تناقض فقط یکی از قواعد بازی هست که نشان می دهد که وقتی ما در یک استدلال ریاضی به تناقض می رسیم یعنی در بازی استنتاج خود به جایی می رسیم که نمی دانیم حالا باید چه حرکتی انجام دهیم. در چنین شرایطی باید بازی را متوقف کنیم و دوباره از اول بگونه ای دیگر آغاز کنیم بطوریکه به بن بست نرسیم. بنابراین وقتی سر کلاس ریاضی می رویم یا در دانشکده ریاضی ثبت نام می کنیم در واقع می خواهیم به فراگیری بازی-زبان ریاضیات پردازیم. البته بازی-زبان ریاضیات خود متشکل از چندین بازی-زبان است: بازی-زبان هندسه، بازی-زبان حساب، بازی-زبان آنالیز، بازی-زبان جبر (نظریه گروه ها و حلقه ها)، بازی-زبان نظریه مجموعه ها و بی نهایت ها، بازی-زبان نظریه اعداد، بازی-زبان منطق و

حال پرسش اولیه خود را مجدداً بپرسیم: مبنای این بازی-زبان ها چیست؟ این پرسش شبیه آین هست که بپرسیم: مبنای یک بازی چیست؟ آیا بازی فوتبال مبنای دارد؟ آیا بازی لی لی براساس بنیادی بنا می شود؟ بازی فقط یکسری واژه ها و قواعدی دارد که بازی کن ها مطابق آن بازی می کنند. اگر از یک بازیکن مثلاً یک فوتبالیست بپرسیم مبنای بازی فوتبال چیست؟ سوال بی معنایی کرده ایم و او نیز بعید است که بتواند به این پرسش جواب دهد. همین وضعیت درباره بازی-زبان ها نیز برقرار است. بازی-زبان شبیه یک ساختمان نیست که قوام آن بر روی پایه های سخت و محکم باشد. از این رو ویتگنشتاین می گوید: «شما باید در نظر داشته باشید که بازی-زبان بیان چیزی غیر قابل پیش بینی است. منظور من این است که: آن مبنای ندارد. استدلال پذیر نیست (یا استدلال ناپذیر نیست). آن آنجا هست - شبیه زندگی ما» (Wittgenstein, 1969, p559) از این رو ویتگنشتاین به جای اینکه بپرسد مبنای منطق و ریاضیات چیست؟ می پرسد «چرا ریاضیات به مبنای نیاز دارد؟» و در ادامه می گوید

به اعتقاد من، ریاضیات همانقدر به پایه و اساس نیاز دارد که گزاره های مربوط به اشیاء فیزیکی - یا درباره برداشت های حسی - به تحلیل نیاز دارند. آنچه گزاره های ریاضی به آن نیاز دارند، روشن شدن دستور زبان آنهاست، درست مانند سایر گزاره ها.

(Wittgenstein, 1998a, p378)

۳.۲ قطعیت احکام منطق و ریاضی: کسب مهارت در استنتاج و محاسبه

بیاییم از قواعد منطق آغاز کنیم. قاعده وضع مقدم را در نظر بگیرید:

$$\frac{p \rightarrow q}{p} \quad q$$

درستی و قطعیت این قاعده به چه چیزی بر می گردد؟ اگر بگوییم که همه انسان ها به این روش استدلال می کنند بدان معناست که شیوه استدلال همه انسان ها – آنانی که اکنون زنده اند و آنانی که پیش از این زندگی می کردند- را بررسی کرده ایم و دیده ایم که وضع مقدم یکی از قاعده های استدلال آنان هست. آشکار است که ما چنین کاری را نه انجام داده ایم و نه می توانیم انجام دهیم. اگر بگوییم این قاعده جزو مقولات پیشینی ذهن ما انسان ها است در واقع این یک فرض است که ما قایل شده ایم و دلیل و شاهدهی آشکارتر از خود قاعده وضع مقدم برای آن نداریم. پس مبنای درستی این قاعده چیست؟ ویتگنشتاین برای اینکه نشان دهد گرامر این پرسش درباره قواعد منطق درست نیست متذکر دو نکته می شود:

- «استنتاج منطقی بخشی از یک بازی-زبان است. و کسی که در این بازی-زبان استنتاج های منطقی انجام می دهد، از دستورالعمل های خاصی که در یادگیری عملی بازی-زبان به او داده شده است، پیروی می کند.» (Wittgenstein, 1998a, p378)

- استنتاج شامل چه چیزی است؟ مطمئناً شامل این است: در برخی بازی-زبان ها ما یک گزاره را به عنوان یک حکم پس از گزاره دیگر بیان می کنیم، می نویسیم (و غیره)؛ چگونه قانون بنیادینی (مبنا- مترجم) می تواند این کار را برای من توجیه کند؟ (Wittgenstein, 1998a, p44)

پرسش از مبنا برای قاعده های منطق به این می ماند که ما با متر (یک متر آهنی یا پلاستیکی) به اندازه گیری ابعاد اشیا گوناگون می پردازیم و صحت و سقم درستی اندازه آنها را بررسی می کنیم. شیوه کارمان نیز این است که متر را روی طول جسم مورد نظر می گذاریم و بررسی می کنیم که طول مزبور چند برابر یک متر یا کسری از آن است. اما ناگهان درنگی می کنیم و درباره درست یا نادرست بودن متر – به مثابه معیار اندازه گیری- سوال می کنیم. چرا این طولی را که یک متر می نامیم معیار اندازه گیری طول در نظر

گرفته‌ایم؟ مبنای این کار چیست؟ چرا به این شیوه طول اجسام را اندازه می‌گیریم؟ یعنی چرا متر را روی طول یک جسم می‌گذاریم تا ببینیم که طول جسم چند برابر میله متر هست؟ این پرسش‌ها از این حکایت دارند که ما همان شیوه‌ای را که برای درستی اندازه‌گیری طول اشیا بکار می‌بریم، برای خود معیار و روش اندازه‌گیری نیز بکار می‌بریم. آیا ما می‌توانیم همان پرسش‌هایی را که برای صحت و سقم طول یک جسم مطرح می‌کنیم برای خود معیار یا روش اندازه‌گیری - متر - نیز مطرح کنیم؟

ویتگنشتاین معتقد است که وقتی به خود معیار و مبنای اندازه‌گیری شک می‌کنیم، گرامر زبان را بطور اشتباهی بکار برده‌ایم (این همان نکته دومی هست که در بالا بدان اشاره شد). زیرا پرسش‌هایی از این دست در مورد گزاره‌هایی هست که موضوع دانستن هستند. متر و شیوه اندازه‌گیری گرفتن با متر خود دستگاه مرجع هر آن چیزی هست که اندازه‌گیری نامیده می‌شود از این رو پرسش از صحت و سقم آن بی‌معناست. پس متر و شیوه اندازه‌گیری با آن از کجا آمده است؟ ما و جامعه انسانی که در آن زندگی می‌کنیم در طول زندگی طبیعی خود طی سالیان طولانی طول معینی را به عنوان متر در نظر گرفته‌ایم و شیوه بکارگیری آن را به عنوان شیوه اندازه‌گیری تلقی نموده‌ایم.

به همین صورت قطعیت و ضرورت قواعد منطق نیز از شکل زندگی ما انسان‌ها شکل گرفته است که از یونان باستان به بعد در بستر بازی-زبان فلسفه و منطق یونان زندگی کرده‌ایم. ما در سیر زندگی دو هزارساله خود در بازی-زبان‌های زندگی خود این قواعد را بکار گرفته‌ایم. هر وقت در بازی-زبان خود این قواعد - قاعده وضع مقدم، رفع تالی، امتناع عدم تناقض و ... - را درست بکار ببریم می‌گوییم ما یک استدلال کرده‌ایم: استدلال معتبر. به عبارت دیگر ما اساساً به چیزی استدلال می‌گوییم که مطابق این قواعد باشد. ویتگنشتاین معتقد است:

استنتاج‌های منطقی مراحلی هستند که مورد سوال قرار نمی‌گیرند. اما دلیل اینکه آنها مورد سوال قرار نمی‌گیرند این نیست که «قطعاً با حقیقت مطابقت دارند» - یا چیزی شبیه به این - نه، آن چیزی که «فکر کردن»، «صحبت کردن»، «استنتاج کردن» یا «استدلال کردن» نامیده می‌شود، فقط همین است. در اینجا اصلاً هیچ سوالی در مورد نوعی مطابقت بین آنچه گفته می‌شود و واقعیت وجود ندارد؛ بلکه منطق مقدم بر چنین مطابقتی است؛ به همان معنایی که ایجاد یک روش اندازه‌گیری مقدم بر درستی یا نادرستی یک گزاره طولی است. (Wittgenstein, 1998a, p96)

از این رو این قواعد چنان در ما نهادینه شده است که در آن هیچ شکی نمی‌کنیم و آن را یقینی و ضروری می‌پنداریم.

ما اکنون از «صلابت و تغییرناپذیری» (inexorability) منطق صحبت می‌کنیم؛ و قوانین منطق را سخت و تغییرناپذیر، حتی سخت و تغییرناپذیرتر از قوانین طبیعت، در نظر می‌گیریم. اکنون توجه را به این واقعیت جلب می‌کنیم که کلمه «صلابت و تغییرناپذیری» به طرق مختلفی استفاده می‌شود. مطابق با قوانین منطق ما، حقایق بسیار کلی از تجربه روزانه وجود دارد. آنها حقایقی هستند که به ما امکان می‌دهند تا آن قوانین را به روشی بسیار ساده (مثلاً با جوهر روی کاغذ) اثبات کنیم. آنها باید با حقایقی مقایسه شوند که اندازه‌گیری با معیار را آسان و مفید می‌کنند. این دقیقاً نشان‌دهنده استفاده از این قوانین استنتاج است، و اکنون این ما هستیم که در اعمال این قوانین سخت‌گیرانه و تغییرناپذیر عمل می‌کنیم. زیرا ما «اندازه می‌گیریم»؛ و بخشی از (روال عملی - مترجم) اندازه‌گیری این است که همه معیارهای یکسانی داشته باشند. (Wittgenstein, 1998a, p82)

با بررسی اقوام و قبایل دیگر می‌بینیم که بکارگیری این قواعد خیلی هم «با صلابت و تغییرناپذیر» نیستند و آنان قواعد دیگری را در بازی‌زبان‌های خود رعایت می‌کنند. برای مثال لوی برول از قبیله ای به نام ایپون‌ها سخن می‌گوید. فردی را در نظر بگیرید که با نیزه بشدت زخمی می‌شود و می‌میرد. در بازی‌زبان ما زخم عمیق که روباز هست بدون مصرف آنتی بیوتیک سبب عفونت شدید می‌شود این عفونت سرانجام به خون فرد راه می‌یابد و سبب مرگ وی می‌شود. بنابراین طبق قاعده وضع مقدم هر فردی که دارای چنین زخمی باشد سرانجام خواهد مرد. اما ایپون‌ها شیوه استدلالشان به صورت دیگری است:

ایپون‌ها معتقدند که مقتول نه بر اثر اصابت نیزه بلکه به سبب سحرهای مرگ ساحران ... درگذشته است. بنابراین آنان ترغیب می‌شوند که ساحران را از میان خود تبعید کنند. ساحران باید کفاره ارتباطشان با مرگ را بدهند. از این رو برای از میان بردن ساحران دل و زبان شخص مرده را بی درنگ پس از جان سپردنش از بدن او بیرون می‌آورند و آنها را در آتش کباب می‌کنند. سپس دل و زبان کباب شده را پیش سگان می‌اندازند تا بخورند. گرچه بومیان دل‌ها و زبان‌های کباب شده بسیاری از مردگان را به سگان داده‌اند اما هرگز مشاهده نکرده‌اند که ساحری بر اثر آن مرده باشد. اما آن‌ها به این رسم دینی نیاکان خود پایبندند. (برول، ۱۳۸۹، ص ۱۳۸-۱۳۹)

در حالیکه طبق بازی-زبان ما که شیوه استدلالی می‌نامیم ما بر اساس قاعده رفع تالی نتیجه می‌گیریم که کباب کردن دل و زبان سبب نابودی ساحران نمی‌شود بنابراین این فرض که ساحران سبب مرگ فرد شده اند غلط هست.

اگر ما به مطالعه قبیله ایپون ها بپردازیم می‌توانیم قواعد بازی-زبان آنان را استخراج کنیم البته ما به این قواعد دیگر استدلال نخواهیم گفت زیرا استدلال از نظر ما یعنی بکارگیری قواعد منطق صوری. ما می‌توانیم استنتاجات افراد قبیله ایپون را بر اساس قواعد بازی-زبان خودشان بررسی کنیم و از درستی و نادرستی آن ها سخن بگوییم اما خود قواعد بازی-زبان آنان و روال عملی بکارگیری آن ها نیاز به توجیه و مبنا ندارد. بنابراین در درون یک روال عملی که در آن قضایای منطق نقش ویژه خود را ایفا می‌کنند به ارزیابی استدلال بپردازیم ولی خود این روال را نمی‌توانیم به همان نحو ارزیابی کنیم.

ویتگنشتاین همین پرسش را درباره ریاضی نیز مطرح می‌کند: «صلابت و تغییرناپذیری ریاضیات به خاطر چیست؟» (Wittgenstein, 1998a, p37) او مثال اعداد طبیعی را می‌زند و می‌پرسد چه چیزی سبب می‌شود که بعد از عدد ۱ عدد ۲ بیاید یا بعد از عدد ۲، عدد ۳ بیاید؟ چرا مجموع ۲ با ۳ برابر ۵ است و نه ۶؟ آیا این به دلیل ضرورت منطقی هست؟ یا به دلیل شهود پایه -دویت- درونی ما؟ جواب او این است که آنچه ما شمارش و حساب می‌دانیم، همین هست. اگر

کسی اعداد را یکی پس از دیگری به هر ترتیبی که می‌خواهد بیاورد مسلماً ما آن را «شمارش» نمی‌خوانیم و یقیناً موضوع هم در اینجا فقط یک نامگذاری نیست. آنچه را که ما «شمارش» می‌نامیم بخش مهمی از فعالیت های زندگی ماست. شمارش، (بطریق متداول) تکنیکی است که در اغلب اعمال متنوع زندگی روزانه خود بکار می‌بریم... همان اندازه که می‌توان گفت سری اعداد طبیعی صادق است که می‌توان گفت زبان طبیعی صادق است. در اینجا مساله صدق و کذب مطرح نیست، آنچه اهمیت دارد این است که این سری کاربرد دارد یعنی قابل استعمال است و بالاتر از آن اینکه استعمال می‌شود. (Wittgenstein, 1998a, p37) (RFM, 1998, p37)

یقین ما نسبت به قضایای منطق و ریاضیات فقط نشانه مهارت ما در به کاربردن تکنیک‌های عملی استنتاج و محاسبه است. این یقین شکلی از اعتماد عملی ماست که می‌توان آن را بدین صورت بیان کرد: «من اثبات را بررسی می‌کنم و سپس نتیجه آن را می‌پذیرم. منظورم این است که: این صرفاً کاری است که ما انجام می‌دهیم. این عادت و

یقین ریاضی: روال عملی استنتاج و محاسبه (غلامحسین مقدم حیدری) ۷۱

رسم بین ماست، یا یک واقعیت از تاریخ طبیعی ماست.» (Wittgenstein, 1998a, p61) (RFM, 1998, p61) مساله این نیست که کسی از صدق قضایای آگاهی داشته باشد بلکه موضوع فقط مهارت و ورزیدگی او برای شرکت در روال عملی استنتاج و محاسبه است. قبیله ای که افراد آن شیوه دیگری برای محاسبه و شمارش دارند روال عملی محاسبه شان کاملاً متفاوت هست.

ساکنان جزایر تنگه تورس هر چیزی را که بیش از ده باشد بطور دیدنی می شمارند. بنابراین هر یک از انگشتان دست راست را لمس می کنند، سپس مچ، آرنج و شانه ای که طرف راست بدن است، سپس جناغ سینه را لمس می کنند و تا محل اتصال و از آنجا شمارش را از طرف چپ بدن ادامه می دهند تا به انگشتان دست چپ برسند. این شمارش کانکریت عدد هفده را به آنان می دهد. چنانچه این شمارش کافی نباشد انگشتان پا، قوزک پا، زانو و استخوان چاربند (لگن و خاصره) را (که ران راست را به ران چپ متصل می کند) می شمارند. این شمارش نیز شانزده عدد دیگر به آنان می دهد. مجموع این شمارش بالغ بر عدد سی و سه می شود اما شمارش بیش از سی و سه را فقط به کمک دسته ای ترکیه می توانند انجام دهند. (برول، ۱۳۸۹، ص ۲۷۱-۲۷۲)

اما نکته مهم این است که نه اسم عددی وجود دارد و نه حتی عدد به معنای دقیق آن؛ بلکه تنها روال عملی ای برای شمردن وجود دارد. برای افراد این قبیله مفهوم عدد و ضرورت قضایای حساب معنا ندارد نه به دلیل عقب ماندگی آنان بلکه به دلیل اینکه در روال عملی شمارش آنان این مفاهیم وجود ندارد.

۳. نتیجه گیری

از زمانی که بحران مبانی که در اواخر قرن نوزدهم رخ داد، فیلسوفان و ریاضی دانان کوشیدند تا پاسخی برای این پرسش که «ضرورت قضایای منطق و ریاضی از کجا می آیند؟» بیابند. اما شیوه این پاسخ مبتنی بر یافتن مبنایی برای توجیه ضرورت قضایای منطق و ریاضیات بود. اما ویتگنشتان از منظر جدیدی این پرسش را مورد بررسی قرار داد. مایکل دامت رویکرد ویتگنشتاین را چنین توصیف می کند:

ریاضیات حقیقی را باید در برهان های قضیه ها دید. اگر بخواهیم به محتوای واقعی قضیه آگاه شویم باید بنگریم ببینیم برهان ها چه چیزی را اثبات می کنند. نقد کردن و به چالش گرفتن ریاضیات واقعی وظیفه فیلسوف نیست. ریاضیات و فلسفه دو فعالیت

یکسره جدا از هم اند و فیلسوف حق ندارد که در کار ریاضیدان مداخله کند. او تنها می تواند مشاهده کند که ریاضی دان چه می کند، آن را بپذیرد و توصیف کند (دامت، ۱۳۹۳، ص ۱۵۰)

مطابق چنین رویکردی، دیگر نباید بپرسیم «مبنای منطق و ریاضیات چیست؟» زیرا این پرسش به چالش گرفتن ریاضیاتی است که در عمل در میان ریاضی دانان در جریان است. منطق و شاخه های گوناگون ریاضیات بازی-زبان های گوناگونی هستند: بازی-زبان منطق صوری، بازی-زبان هندسه، بازی-زبان حساب و قوانین و اصول موضوعه منطق و ریاضیات در واقع قواعد این بازی-زبان ها هستند، که لازم به توجیه و مبنا ندارند زیرا قطعیت شان ناشی از نقش گرامری آنها در روال عملی استنتاج و محاسبه هست. مساله صدق و کذب یک قضیه درون یک روال عملی مطرح می شود و نه درباره قواعد شیوه استنتاج و محاسبه. از نظر ویتگنشتاین «صلابت و استحکام یک استنتاج معتبر یا یک محاسبه درست، از پراتیک استنتاج و محاسبه یا روال عملی کار ما ناشی می شود» (علوی نیا، ۱۳۸۰، ص ۸۴). یقین ما به قواعد منطق و ریاضیات به نتیجه کاربرد آنها در زمینه های تجربی بستگی ندارد بلکه به قبول مهارت و ممارست در یک توانایی عملی وابسته است. به عبارت دیگر این قواعد برای ما بی چون و چرا هستند زیرا بدون آنها نمی توانیم به استدلال یا محاسبه ای پردازیم. صلابت، تغییرناپذیری و ضرورت این قواعد ناشی از آن است که ما هیچ فرایند دیگری را استنتاج یا محاسبه نمی دانیم.

کتابنامه

- علوی نیا، سهراب (۱۳۸۰) معرفت شناسی ریاضی ویتگنشتاین و کواچین، انتشارات نیلوفر
- علوی نیا، سهراب (۱۳۸۳) «طبیعت گرایی نظریه مجموعه ای به عنوان پایه ریاضیات»، مقالات و بررسیها، دفتر ۷۵ (۲)
- بیات، حسین (۱۳۹۷) نقد و ارزیابی افلاطون گرایی ریاضیاتی جدید، پژوهش های فلسفی، سال ۱۲، ش ۲۳
- لوی بربول، لوسین (۱۳۸۹) کاربردهای ذهنی در جوامع عقب مانده، ترجمه یدالله موقن، انتشارات هرمس.
- دامت، مایکل (۱۳۹۳) فلسفه ریاضیات، ترجمه مرتضی قرایی گرکانی، انتشارات حکمت

یقین ریاضی: روال عملی استنتاج و محاسبه (غلامحسین مقدم حیدری) ۷۳

براور، اخبرتوس یان (۱۳۷۶) «شهودگرایی و صورتگرایی» ترجمه محمد اردشیر، نشر ریاضی، سال ۹، ش ۱.

فان آتن، مارک (۱۳۸۷) فلسفه برائور، ترجمه محمد اردشیر، انتشارات هرمس

Wittgenstein (1953 third edition 1989) *Philosophical Investigation*, by G.E.M.Anscombe, Blackwell

Wittgenstein (1998 a) *Remarks on the Foundations of Mathematics*, edited by G. H. von Wright, R. Rrees, G. E. M. Anscombe, Translated by G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford

Wittgenstein, Ludwig (1969) *On Certainty*, edited by Anscombe & von Wright, Basil Blackwell, Oxford

Wittgenstein (1998 b) *The Collected Works of Ludwig Wittgenstein: Notebooks 1914-1916*, (Second edition 1979 Reprinted 1998), Edited by G. H. von Wright and G. E. M. Anscombe with an English translation by G. E. M. Anscombe, Blackwell.

Hacker, P.M.S. (2011) "Forms of Life and Language Games", in *Forms of Life and Language Games* (Eds. Jesús PADILLA GÁLVEZ, Margit GAFFAL), Ontos Verlag, Frankfurt a. M.

Pollack, John L (1986) *Contemporary Theories of Knowledge*, Rowman & Littlefield publishers, USA

Bergmann, Michael (2004) "What's "NOT" Wrong with Foundationalism", in *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. 68, No. 1

Alston, William P. (1976) "Two Types of Foundationalism" in *The Journal of Philosophy*, Vol. 73, No. 7

Rockmore, Tom (2004) *On Foundationalism: A Strategy for Metaphysical Realism*, Rowman & Littlefield Publishers, Inc.

Hilbert, David (1950) *The Foundations of Geometry*, translated by E. J. Townsend The Open Court Publishing Company

Mancosu, Paolo (1998) *From Brouwer to Hilbert : the debate on the foundations of mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, Inc.