

Proof Paradoxes:

An Analysis of Thomson's Argument and Redmayne's Objection

Mohammad Reza Hezareh*

Seyyed Mohammad Mahdi Etemadoleslami Bakhtiari**

Abstract

Proof paradoxes refer to situations where naked statistical evidence supports the conviction of a defendant, yet the resulting judgment appears counterintuitive when considered solely from this evidence. The prevailing approach to addressing proof paradoxes involves distinguishing naked statistical evidence from other types of evidence. In this framework, Thomson (1986) proposes that the existence of a causal relationship between the evidence and its source can serve as a criterion for this distinction. Conversely, Redmayne (2008) contends that Thomson's proposal is unhelpful, arguing that even with naked statistical evidence, a causal relationship can be established in accordance with Thomson's view. In this study, we demonstrate that, by leveraging Pollock's nomic probability theory and Woodward's causal model, Thomson's proposed criterion can be refined to effectively address Redmayne's criticisms.

Keywords: Pollock's Nomic probability, legal standards of proof, Proof Paradoxes, Woodward's causal model, Thomson, Redmayne, Statistical evidence.

* MA in Philosophy of Science, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran (Corresponding Author),
mohammadreza.hezareh.aut@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-1907-5916>

** Assistant Professor in Science and Technology Studies Group, Department of Management, Science and
Technology, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran, m.etemad@aut.ac.ir,
<https://orcid.org/0009-000-9214-1792>

Date received: 23/09/2025, Date of acceptance: 29/12/2025



Introduction

The proof paradoxes refer to situations where the foundational claim supporting a verdict relies solely on naked statistical evidence. These examples are constructed so that the decision-maker's degree of belief exceeds the probabilistic thresholds set by relevant standards of proof, yet many intuitively feel that this is insufficient to justify a conviction. This raises a critical question: what explains this intuitive preference for other forms of evidence? Two main theoretical frameworks address this: the "revisionary" approach, which argues that such intuitions are unwarranted and should be reconsidered, and the "non-revisionary" stance, which seeks to justify the distinction between valid evidentiary proof and naked statistical evidence through concepts such as "defendant-dependency," "knowledge," and "normic support .

Materials & Methods

This research employs a critical analytical method to evaluate the debate between Thomson and Redmayne. The methodology consists of three steps:

1. Clarification: Analyzing Thomson's criterion for valid evidence (causal connection) and Redmayne's subsequent critiques regarding the ambiguity of causality .
2. Deconstruction: Identifying the core assumptions of Redmayne's critique, specifically the validity of inferring accident rates from ownership rates and the existence of a causal relationship between ownership and liability .
3. Theoretical Integration: Applying Pollock's nomic probability framework to challenge epistemic justifications of statistical inference and utilizing Woodward's causal model (specifically the reproducibility criterion) to provide a precise definition of a "causal link".

Discussion & Results

The analysis demonstrates that Redmayne's critique of Thomson is well-founded regarding the lack of precision in the definition of causality. However, by applying Pollock's framework, this study reveals that inferring accident rates solely from ownership data fails to satisfy the criteria of nomic probability, meaning such inferences are not epistemically justified. Furthermore, by integrating Woodward's causal model, a clear distinction is established: valid evidence is distinguished from

naked statistical evidence by its ability to satisfy the reproducibility criterion. This explains why convictions based on individualized evidence are intuitively superior to those based on statistical data .

Conclusion

The primary aim of this research—to refine Thomson’s criterion to address Redmayne’s objections—is achieved by transitioning from a vague notion of causality to a rigorous model based on Woodward’s reproducibility. The study concludes that the intuitive rejection of naked statistical evidence is grounded in the absence of a genuine causal link between the statistical data and the specific liability of the defendant. This refinement provides a robust epistemological basis for distinguishing between a naked statistical evidence from other forms of legally valid evidence.

Bibliography

- Hazareh, M.R. & Etemadolisami Bakhtiari, S.M.M. (2024). *Di Bello on Smith's Solution to the Proof Paradoxes*. *Philosophical Inquiry*, 5(1), 81–95. [In Persian]. <http://jpt.modares.ac.ir/article-34-79377-fa.html>
- Cmglee & MartinThoma. (2018). *Roc curve.svg* [Diagram]. Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Roc_curve.svg.
- Di Bello, M. (2019). “Trial by statistics: Is a high probability of guilt enough to convict? ”. *Mind*, 128(512), 1045–1084. <https://doi.org/10.1093/mind/fzy026>
- Di Bello, M. (2020). “Proof paradoxes and normic support: Socializing or relativizing? ”. *Mind*, 129(516), 1269–1285. <https://doi.org/10.1093/mind/fzz021>
- Duff, R. A., Farmer, L., Marshall, S., & Tadros, V. (2007). *The trial on trial: Towards a normative theory of the criminal trial* (Vol. 3), Oxford: Hart Publishing.
- Hamer, David. (2004). “Probabilistic standards of proof, their complements and the errors that are expected to flow from them”. *University of New England Law Journal*, 1(1): 71-107.
- Moss, Sarah. (2018). *Probabilistic Knowledge*, Oxford: Oxford University Press.
- Nesson, Charles R. (1979). “Reasonable Doubt and Permissive Inferences: The Value of Complexity”. *Harvard Law Review*, 92(6), 187-1225.
- Pollock, J. L. (2001). “Defeasible reasoning with variable degrees of justification”. *Artificial Intelligence*, 133(1–2), 233–282. [https://doi.org/10.1016/S0004-3702\(01\)00145-X](https://doi.org/10.1016/S0004-3702(01)00145-X)
- Pollock, John L. (1990). *The Theory of Nomic Probability II*, Oxford.
- Redmayne, M. (2008). “Exploring the proof paradoxes”. *Legal Theory*, 14(4), 281–309. <https://doi.org/10.1017/S1352325208080117>
- Reichenbach, H. (1949). *The theory of probability: An inquiry into the logical and mathematical foundations of the calculus of probability*, University of California Press.

- Roth, A. (2010). “Safety in numbers? Deciding when DNA alone is enough to convict”. *New York University Law Review*, 85(4), 1130–1185. <https://nyulawreview.org/issues/volume-85-number-4/safety-in-numbers-deciding-when-dna-alone-is-enough-to-convict>
- Sant, L. (2025). History and Philosophy of Probability: From Ancient Games to Modern Theories. In M. Lovric (Ed.), *International Encyclopedia of Statistical Science* (pp. 1116–1125), Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-69359-9_210
- Schoeman, F. (1987). “Statistical vs. direct evidence”. *Noûs*, 21(2), 179–198. <https://doi.org/10.2307/2214913>
- Thomson, J. J. (1986). *Liability and individualized evidence*. In W. Parent (Ed.), *Rights, restitution, and risk: Essays in moral theory* (pp. 199–219), Harvard University Press.
- Wells, Gary L. (1992). “Naked Statistical Evidence of Liability: Is Subjective Probability Enough?”. *Journal of Personality and Social Psychology*, 62(5), pp. 793–52.
- Williams, Glanville 1979: “The Mathematics of Proof, parts I and II”. *Criminal Law Review*, pp. 297–312, 340–54.
- Woodward, J. (2005). *Making things happen: A theory of causal explanation*, Oxford university press.

پارادوکس‌های اثبات: واکاوی استدلال تامسون و ردیه ردماين بر آن

محمد رضا هزاره*

سید محمد مهدی اعتمادالاسلامی بختیاری**

چکیده

پارادوکس‌های اثبات بر وضعیت‌هایی اطلاق می‌شود که شواهد آماری صرف به سود محکومیت خوانده یا متهم‌اند، اما محکومیت او صرفاً بر اساس این شواهد، برخلاف شهود به نظر می‌رسد. رویکرد غالب در مواجهه با پارادوکس‌های اثبات، تلاش برای بازشناسایی شواهد آماری صرف از سایر ادله‌ی اثبات محکومیت است. در این چارچوب، تامسون (۱۹۸۶) وجود رابطه‌ی علی بین شاهد و منشأ ایجاد آن را به‌عنوان ملاکی برای تمایز یادشده پیشنهاد می‌کند. در سوی دیگر ردماين (۲۰۰۸) استدلال می‌کند پیشنهاد تامسون راهگشا نیست چراکه در شواهد آماری صرف نیز می‌توان رابطه‌ی علی را مطابق با تلقی تامسون برقرار دانست. در این پژوهش می‌کوشیم تا نشان دهیم به پشتمانی آموزه‌ی احتمال قانونی پولاک و الگوی علی وودوارد می‌توان ملاک پیشنهادی تامسون را به‌گونه‌ای تدقیق نمود که از نقدهای ردماين مصون بماند.

کلیدواژه‌ها: احتمال قانونی پولاک، استانداردهای اثبات قانونی، پارادوکس‌های اثبات، الگوی علی وودوارد، تامسون، ردماين، شواهد آماری.

* کارشناس ارشد، فلسفه علم، دانشکده مدیریت، علم و فناوری، دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران، ایران
(نویسنده مسئول)، mohammadreza.hezareh.aut@gmail.com

** استادیار، گروه مطالعات علم و فناوری، دانشکده مدیریت، علم و فناوری، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران، m.etemad@aut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۰۱، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۰۸



۱. مقدمه

پارادوکس‌های اثبات بر وضعیت‌هایی اطلاق می‌شود که گزاره‌ی مبنای حکم با شواهد آماری صرف حمایت می‌شود. این مثال‌ها طوری طراحی شده‌اند که بر مبنای شواهد آماری ارائه‌شده درجه باور تصمیم‌گیرنده از آستانه‌های احتمالاتی برگرفته از استانداردهای اثبات مربوطه فراروی می‌کند. استانداردهای اثبات در پرونده‌های حقوقی «غلبه‌ی شواهد» (Preponderance of evidence) و در پرونده‌های کیفری «اثبات فراتر از شک معقول» (Proof beyond a reasonable doubt) می‌باشد (Hamer, 2004). مثال اتوبوس آبی در چارچوب حقوقی یکی از مثال‌های بازنمایی‌کننده‌ی این وضعیت می‌باشد. خانم اسمیت در حال گذر از خیابان با یک اتوبوس تصادف می‌کند. در شهر محل حادثه صرفاً دو شرکت اتوبوسرانی آبی و قرمز وجود دارد. شرکت آبی مالکیت ۷۰ درصد اتوبوس‌ها و شرکت قرمز مالکیت ۳۰ درصد آن‌ها را دارد. اتوبوس‌های هر شرکت مطابق نام آن‌ها به رنگ آبی و قرمز می‌باشند. خانم اسمیت صرفاً به یاد دارد که با یک اتوبوس برخورد کرده است و رنگ آن را به خاطر ندارد. هیچ شاهد دیگری نیز مبنی بر اینکه نشان دهد اتوبوس دخیل در حادثه متعلق به کدام شرکت بوده است، در اختیار نمی‌باشد (Di Bello, 2020). تفسیر احتمالاتی از استاندارد «غلبه‌ی شواهد» بیانگر این است که اگر درجه باور تصمیم‌گیرنده قضایی در خصوص موضوع حکم ۵۰ درصد یا بالاتر باشد، می‌توان بر مبنای آن حکم نمود (Hamer, 2004). در اینجا با استناد به داده‌های آماری برآمده از نسبت مالکیت اتوبوس‌ها، احتمال اینکه شرکت آبی مقصر در حادثه باشد، ۷۰ درصد است.

مثال دیگر که در چارچوب کیفری مطرح می‌شود، سناریوی زندان نام دارد. در حیاط یک زندان، صد زندانی حاضر هستند. ۹۹ زندانی در یک لحظه اقدام به یورش به سمت نگهبان حاضر در محوطه نموده و او را به قتل می‌رسانند. تصاویر برداشت‌شده از دوربین مداربسته‌ی محوطه‌ی زندان صرفاً مشخص می‌کند که یک زندانی از مشارکت در قتل خودداری کرده است. کیفیت تصاویر به نحوی است که به هیچ صورت نمی‌توان زندانی اجتناب‌کننده را شناسایی کرد. در این صورت اگر یک زندانی را به صورت تصادفی انتخاب کرده و تحت محاکمه قرار دهیم، احتمال مجرمیت او ۹۹ درصد است (Nesson, 1979). در مسائل کیفری استاندارد «اثبات فراتر از شک معقول» تعیین‌کننده است. با در نظر داشتن اصول کیفری مانند اصل براءت، این استاندارد تصمیم‌گیرنده قضایی را در مقایسه با پرونده‌های حقوقی ملزم به درجه بیشتری از احتیاط در تصمیم‌گیری می‌کند، بنابراین در

تفسیر احتمالاتی اعدادی مانند ۹۰ یا ۹۵ درصد برای درجه باور تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شود (Hamer, 2004).

در هر دو مثال بیان‌شده که یکی در چارچوب حقوقی و دیگری در چارچوب کیفری طرح گردید، احتمال محکومیت از احتمال تعیین‌شده توسط استاندارد اثبات مرتبط بالاتر است؛ اما محکومیت شرکت آبی و زندانی انتخاب‌شده بر مبنای داده‌های آماری اشاره‌شده با شهود ما ناسازگار است. حال فرض کنید که شاهد عینی در صحنه‌ی قتل نگهبان حاضر بوده و شهادت می‌دهد که زندانی انتخاب‌شده در قتل مشارکت داشته است. آیا میزان خطاپذیری شاهد کمتر از ۱ درصد خواهد بود؟ (Di Bello, 2019). با وجود خطاپذیری شاهد عینی و سایر ادله‌ی اثباتی، بسیاری از حقوق‌دانان و فیلسوفان آن‌ها را دارای برتری شهودی نسبت به شواهد آماری صرف دانسته و برای اثبات جرم موجه می‌دانند (Wells, 1992).

دلیل این برتری شهودی چیست؟ در مواجهه با این پرسش دو رویکرد اصلی وجود دارد. رویکرد اول «رویکرد بازبینانه» نام دارد. مطابق این رویکرد، از آنجایی که احتمال مجرمیت متهم بر اساس سایر ادله‌ی اثبات جرم نظیر شاهد عینی و مطابقت دی.ان.ای اصولاً به اندازه‌ی سناریوی زندان و یا حتی کمتر از آن است، در نتیجه شهود ما در خصوص برتری سایر ادله‌ی اثباتی غیرموجه بوده و باید در آن بازنگری کنیم.^۱

نگاه دوم، رویکرد «غیربازبینانه» است. رویکرد غیربازبینانه محبوبیت بیشتری در بین کسانی که به این مسئله پرداخته‌اند، دارد. رویکرد این مقاله نیز براساس این نگاه خواهد بود. استدلال کلی در این رویکرد این‌گونه است که ناسازگاری شهودی محکومیت بر اساس داده‌های آماری صرف موجه است. اما چرا شهود ما، بین داده‌های آماری صرف و سایر ادله‌ی اثباتی تمایز قائل می‌شود؟ همان‌طور که اشاره شد، به‌عنوان مثال در سناریوی زندان اگر شاهد عینی شهادت دهد که متهم تحت محاکمه در قتل مشارکت داشته است، احتمال خطاپذیری آن از یک درصد کمتر نخواهد بود. بنابراین تمایز سایر ادله‌ی معتبر اثباتی جرم و شواهد آماری صرف در ایجاد یقین نمی‌باشد، زیرا هیچ‌کدام توانایی ایجاد آن را نخواهند داشت. هدف اصلی در نگاه غیربازبینانه یافتن این وجه تمایز بین سایر ادله‌ی اثباتی معتبر و شواهد آماری صرف است.

بسیاری از فیلسوفان و حقوق‌دانان کوشیده‌اند تا این وجه تمایز را تبیین کنند. به‌عنوان مثال، ویلیامز (Williams) استدلال می‌کند که شواهد اثباتی باید وابسته و گره‌خورده به

شخصیت متهم باشند و شواهد آماری صرف، فاقد این وابستگی هستند (Williams, 1979: 340, 312-297). به عنوان نمونه‌ی دیگر از این تلاش‌ها ماس (Moss) و داف (Duff)، به نسخه‌ی مشخصی از معرفت برای احکام قضایی تکیه می‌کنند که بتواند وجه تمایزی برای شواهد آماری صرف و سایر ادله‌ی اثباتی محکومیت ایجاد کند (Moss, 2018; Duff, 2007). یکی از آخرین تلاش‌ها برای یافتن تمایز مورد نظر، راهکار حمایت عرفی اسمیت (Smith, 2018) می‌باشد که اصلاحیه‌ی دی‌بلو (Di Bello, 2020) بر آن اعمال شده است.^۲ مسیری که در این مقاله پی گرفته می‌شود، به واکاوی دیدگاه تامسون در این خصوص می‌پردازد. مطابق استدلال تامسون ادله‌ی اثباتی موجه، ادله‌ای هستند که بین آن‌ها و پدیده‌ای که از آن به دست می‌آیند، رابطه‌ی علی وجود داشته باشد (Thomson, 1986). در مقابل ردمان، تلقی تامسون از رابطه‌ی علی را مبهم دانسته و استدلال می‌کند که معیار او به نحوی نیست که بتواند تمایزی قاطع بین داده‌های آماری صرف و سایر ادله‌ی اثباتی ایجاد کند، زیرا با در نظر گرفتن تلقی تامسون از رابطه‌ی علی همچنان می‌توان بین شواهد آماری صرف و منشأ آن‌ها رابطه‌ی علی را برقرار دانست (Redmayne, 2008). هدف اصلی پژوهش پیش روی، آن است که نشان دهیم می‌توان ملاک پیشنهادی تامسون را به گونه‌ای تدقیق نمود تا از نقدهای ردمان مصون بماند. برای این منظور، نخست استدلال تامسون و اعتراض ردمان علیه آن را در بخش دوم توضیح می‌دهیم. در اینجا روشن می‌شود که ردیه ردمان بر دو پیش‌فرض اصلی استوار است: یکی موجه بودن استنتاج میزان تصادفات از نرخ مالکیت؛ و دیگری وجود رابطه‌ی علی میان نرخ مالکیت و میزان تصادفات. در گام بعد به پشتوانه آموزه‌های پولاک و به‌طور مشخص احتمال قانونی (Nomic Probability) استدلال می‌کنیم که پیش‌فرض نخست ردمان نادرست است. بخش چهارم بر نقد پیش‌فرض دوم ردمان متمرکز است. در این بخش با استفاده از الگوی علی قابلیت مداخله‌پذیری وودوارد، به‌ویژه ملاک بازتولیدپذیری (Reproducibility) که از جانب او ارائه شده است، نشان می‌دهیم پیش‌فرض دوم ردمان نیز پذیرفتنی نیست؛ اگرچه که مبهم بودن تلقی تامسون از رابطه‌ی علی مسیر را برای این برداشت ردمان باز می‌گذارد.

۲. استدلال تامسون و اعتراض ردمان

تامسون استدلال می‌کند که ضعف معرفت‌شناسانه‌ی شواهد آماری عدم قطعیت و یا ماهیت آماری آن‌ها نیست، بلکه فقدان رابطه‌ی علی مناسب بین شاهد و منشأ آن است که این نوع

شواهد را فاقد ارزش اثباتی می‌سازد. برای روشن شدن نگاه تامسون از حیث معرفت‌شناسی به ذکر یک مثال پرداخته می‌شود.

برت یک بلیت بخت‌آزمایی از مجموع صد بلیت بخت‌آزمایی را خریداری می‌کند. دوست او آلفرد از این موضوع مطلع است. با این توضیح که فرض می‌شود هیچ‌گونه اطلاعات دیگری در اختیار نداریم. نتیجه‌ی به‌دست‌آمده از اطلاعات در اختیار این است که احتمال برنده نشدن برت در بخت‌آزمایی ۹۹ درصد است. سپس بخت‌آزمایی برگزار شده و برت برنده نمی‌شود. آیا این گزاره که آلفرد (پیشاپیش) می‌دانسته است که برت برنده نخواهد شد، صحیح است؟ در اینجا آلفرد باور صادق داشته که برت برنده نخواهد شد، از سوی دیگر، احتمال ۹۹ درصد از باور آلفرد حمایت می‌کند. ضمن اینکه اگر درصد مذکور را به هر میزان افزایش دهیم، همچنان به نظر نمی‌رسد که بتوانیم بگوییم آلفرد به برنده نشدن برت معرفت داشته است (Redmayne, 2008).

از سوی دیگر، فرض کنید دوست دیگر برت که آلیس نام دارد، مطلع است که فروشنده‌ی بلیت بخت‌آزمایی، پس از فروختن بلیت به برت، تهرگ مربوط به بلیت او را بیرون آورده و پاره کرده، سپس بخت‌آزمایی برگزار شده است و برت در آن برنده نمی‌شود. در اینجا معرفت آلیس به این گزاره که برت در بخت‌آزمایی برنده نخواهد شد با این شاهد حمایت می‌شود که آلیس می‌داند فروشنده، پس از فروش بلیت به برت تهرگ مربوطه را پاره کرده است (Redmayne, 2008).

حال سؤال این است که چرا در حالت اول اعتقاد به برنده نشدن برت را نمی‌توانیم مصداقی از معرفت به حساب بیاوریم، اما در حالت دوم باور آلیس به برنده نشدن برت مصداقی از معرفت می‌باشد؟ تامسون برای پاسخ به این سؤال مثال دیگری مطرح می‌کند. فرض کنید در یک دادگاه شواهدی در خصوص مجرمیت متهم ارائه می‌شود. شواهد به نحوی است که هیئت منصفه را بین حکم به محکومیت و یا تبرئه متهم مردد می‌کند. یکی از اعضا پیشنهاد می‌دهد تا برای خروج از این وضعیت سکه پرتاب کنند؛ اگر شیر آمد، حکم به محکومیت متهم داده و در صورت آمدن خط، متهم را تبرئه کنند. فرض کنید متهم در حقیقت همان مرتکب باشد و نتیجه‌ی پرتاب سکه نیز شیر باشد. آیا هیئت منصفه در حکم صادره موجه خواهد بود (Redmayne, 2008).

بنا بر استدلال تامسون در فرض اول مثال بخت‌آزمایی، سناریوی زندان و مثال اتوبوس که دلیل اثباتی در آن‌ها داده‌های آماری صرف می‌باشد، مسئله این است که بین شاهد

حمایت‌کننده معرفت و منشأ آن، رابطه‌ی علی مناسب وجود ندارد. بین نسبت مالکیت اتوبوس‌های آبی به کل اتوبوس‌های شهر و میزان تصادفات مرتبط با شرکت آبی نمی‌توان رابطه‌ی علی برقرار دانست. اما اگر فرض کنیم که در همین مثال شاهد عینی وجود داشته است که شهادت می‌دهد یک اتوبوس آبی را دیده است که به خانم اسمیت برخورد کرده است، آنگاه می‌توانیم بگوییم بین ایجاد رنگ آبی در ذهن شاهد و حادثه تصادف رابطه‌ی علی وجود دارد. به بیان دیگر، بازتابش نور برخوردکننده به اتوبوس دخیل در حادثه به چشم شاهد، علت ایجاد رنگ آبی در ذهن او بوده است (Thomson, 1986).

در مقابل راه‌حل تامسون، رد‌ماین استدلال می‌کند تلقی تامسون از رابطه‌ی علی مبهم است. بنابراین با در نظر گرفتن تلقی تامسون از رابطه‌ی علی در مثال اتوبوس بین نسبت مالکیت اتوبوس‌ها و میزان تصادفات مرتبط با هر شرکت رابطه‌ی علی همچنان متصور خواهد بود. مطابق استدلال رد‌ماین اگر در مثال بخت‌آزمایی فرض کنیم که بعضی از بلیت‌های بخت‌آزمایی که قیمت بیشتری دارند، دارای شانس بیشتری برای برنده شدن باشند. در این صورت، اگر بلیت فروخته‌شده به برت، یک بلیت معمولی بوده باشد، می‌توان تبیین علی برای اینکه چرا برت در بخت‌آزمایی برنده نشده است، در اختیار داشت. با همین استدلال می‌توان در مثال اتوبوس آبی و با در نظر داشتن اینکه بیشتر اتوبوس‌های شهر آبی هستند، بین نرخ مالکیت و احتمال اینکه بیشتر تصادفات مرتبط با شرکت آبی است، رابطه‌ی علی برقرار دانست. بنابراین پیشنهاد تامسون تمایزدهنده‌ی مناسبی بین شواهد آماری صرف و سایر ادله‌ی اثباتی موجه نخواهد بود (Redmayne, 2008).

اعتراض رد‌ماین به تامسون بر دو پیش‌فرض استوار است: پیش‌فرض اول اینکه از نرخ مالکیت شرکت آبی می‌توان نرخ تصادفات مرتبط با آن شرکت را نتیجه گرفت و دیگر اینکه، می‌توان بین این دو متغیر رابطه‌ی علی را برقرار دانست. برای پاسخ به انتقاد رد‌ماین ابتدا با استفاده از مفهوم احتمال قانونی که توسط پولاک ارائه شده است؛ استدلال می‌شود که چرا استنتاج میزان تصادفات هر شرکت از نرخ مالکیت آن مطابق فرض پارادوکس‌های اثبات موجه نمی‌باشد. پس از آن، با استفاده از الگوی علی وودوارد و به‌طور ویژه، معیار بازتولیدپذیری آن نشان داده می‌شود که چرا نمی‌توان رابطه‌ی بین دو متغیر نرخ مالکیت و میزان تصادفات را یک رابطه‌ی علی دانست.

۳. احتمال قانونی پولاک: ملاکی برای ناموجه بودن استنتاج میزان تصادفات از نرخ مالکیت

برای پاسخ به انتقاد رد ماین ابتدا احتیاج داریم که نشان دهیم که چرا تعیین میزان تصادفات مرتبط با هر شرکت صرفاً بر اساس نرخ مالکیت آن موجه نمی‌باشد. به این منظور از آموزه‌ی احتمال قانونی پولاک استفاده می‌کنیم. از دیدگاه پولاک یک مقدار احتمالاتی زمانی برای استفاده در نظریه‌های تصمیم‌گیری از لحاظ معرفت‌شناسی موجه است که معیارهای بیان‌شده در احتمال قانونی را برآورده کند (Pollock, 1990).

نظریه پردازان احتمال به دو دسته‌ی احتمال‌گرایان ذهنی و احتمال‌گرایان عینی تقسیم می‌شوند. پولاک با قرار گرفتن در دسته‌ی احتمال‌گرایان عینی و با استفاده از مفهوم احتمال قانونی نشان می‌دهد که مقدار احتمال عینی چگونه باید تعیین شود تا بتوان آن را برای استفاده در نظریه‌های تصمیم‌گیری به جهات معرفت‌شناسانه موجه دانست. بر اساس تقسیم‌بندی ارائه‌شده توسط پولاک، قوانین علمی به دو دسته‌ی قوانین آماری و قوانین غیر آماری تقسیم می‌شوند. قوانین آماری دارای ماهیت احتمالاتی هستند. پولاک احتمالات دخیل با قوانین آماری را احتمال قانونی می‌نامد. در مقابل اگر گزاره‌ی $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$ را در نظر داشته باشیم، این گزاره به عنوان یک قانون غیر آماری برای همه‌ی F هایی که از لحاظ فیزیکی امکان وجود دارند، برقرار می‌باشد. بر اساس تعریف پولاک در این صورت، هر F می‌باشد و آن را عمومیت قانونی می‌نامد؛ اما احتمال قانونی دلالت بر این دارد که احتمال اینکه هر F ، G باشد، برابر r بوده و به بیان دیگر، $\text{prob}(F/G)$ از میانگین نسبت وقوع F به G در همه‌ی جهان‌های ممکن فیزیکی به دست خواهد آمد (Pollock, 1990).

مطابق تعریف پولاک، احتمال قانونی از چهار جزء تشکیل شده است: (۱) نظریه استقرار آماری که می‌گوید باید قواعدی وجود داشته باشد که مشخص کند مقادیر احتمال چگونه بر اساس تناوب‌های مرتبط مشاهده‌شده تعیین می‌شوند؛ که عمده‌تاً شامل نظریه استقرار آماری خواهد بود. (۲) اصول محاسباتی باید وجود داشته باشد تا به وسیله‌ی آن‌ها بتوان مقادیر بعضی از احتمال‌های قانونی را توسط احتمال‌های قانونی دیگر محاسبه کنیم. (۳) اصولی باید وجود داشته باشد تا بتوان با استفاده از احتمال‌های قانونی نتایجی را در خصوص سایر موضوعات به دست آورد که این اصول دو دسته می‌باشند: دسته اول این اصول مانند اینکه در بعضی از شرایط می‌توان از بالا بودن احتمال صدق یک موضوع نسبت به آن باور موجه غیر احتمالاتی پیدا کرد. به عنوان مثال می‌دانیم که تاریخ مندرج در

روزنامه با احتمال بالایی از صدق تاریخ روز را نشان می‌دهد، هرچند همواره احتمال بروز خطای چاپی وجود دارد. با این حال، اگر از تاریخ مندرج در روزنامه به این باور برسیم که امروز چه تاریخی است، آنگاه باور ما یک باور موجه غیراحتمالاتی خواهد بود. این اصول بیان می‌کنند که در چه صورت از لحاظ معرفت‌شناسانه مجاز به پذیرش مقدار احتمال بالا به عنوان یک باور موجه هستیم. دسته‌ی دیگر اصول، پیش‌فرض‌های اولیه هستند در خصوص ماهیت محاسباتی احتمال قانونی و ساختار منطقی و ریاضیاتی که برای آن مد نظر است. (۴) نظریه استنتاج مستقیم (Direct inference) (Pollock, 1990).

از آنجایی که نظریه استنتاج مستقیم شرط تعیین‌کننده برای یک احتمال قانونی بوده و مبنای سه شرط دیگر می‌باشد، برای توسعه‌ی بحث موردنظر این مقاله به تدقیق مفهوم آن پرداخته می‌شود. پولاک در یک تقسیم‌بندی دیگر احتمال را به احتمال معین و نامعین تقسیم می‌کند. احتمال معین احتمال صادق بودن یک گزاره مشخص می‌باشد، در مقابل احتمال نامعین به جای گزاره‌ها ناظر به خصوصیات است. به عنوان مثال زمانی که می‌گوییم کسی که سیگار می‌کشد، به احتمال ۷۰ درصد به سرطان مبتلا خواهد شد، درباره‌ی فرد مشخصی صحبت نمی‌کنیم، بلکه در اینجا ارتباط بین دو خصوصیت سیگار کشیدن و ابتلا به سرطان مد نظر است. از آنجایی که احتمال قانونی از استقرای تناوب‌های مرتبط که ناظر بر خصوصیات می‌باشند، به دست می‌آید، بنابراین یک احتمال نامعین می‌باشد. به دلایل عملی معمولاً آنچه که ما به آن احتیاج داریم، احتمال معین صدق یک گزاره است. به عنوان مثال، ما می‌خواهیم بدانیم که احتمال اینکه آیا فردا باران می‌آید و یا احتمال اینکه فرد A دچار حمله‌ی قلبی بشود، چه مقدار خواهد بود؟ نظریه استنتاج مستقیم به ما می‌گوید که احتمال معین چگونه از احتمال نامعین قابل استنتاج است (Pollock, 1990). ایده مبنایی استنتاج مستقیم برای اولین بار توسط رایشنباخ مطرح شده است. بنا به تعریف رایشنباخ جهت تعیین احتمال اینکه c دارای خصوصیت F باشد، باید نزدیک‌ترین کلاس مرجع X را که دارای داده‌های آماری قابل اتکا است، یافته و براساس آن، احتمال $PROB(Fc) =$ $prob(Fx/x \in X)$ را استنتاج کنیم (Reichenbach, 1949).

به عنوان مثال، فرض کنید می‌خواهیم احتمال معین این را که فرد A دچار حمله قلبی شود، تعیین کنیم. برای این کار می‌دانیم که A یک زن است که سیگار می‌کشد. مطابق این اطلاعات فرد A به دو جامعه‌ی آماری زنان و زنان سیگاری به عنوان کلاس‌های مرجع مرتبط می‌باشد. هر کدام از این کلاس‌های مرجع دارای داده‌های آماری قابل اتکائی در این

خصوص می‌باشند که چند درصد از افراد آن جامعه دچار حمله قلبی خواهند شد. در اینجا ارتباط دو خصوصیت بروز حمله قلبی و کشیدن سیگار مد نظر قرار گرفته است (Reichenbach, 1949). بر اساس تعریف پولاک، خصوصیات مورد نظر باید قابلیت تعمیم‌پذیری داشته باشند. قابلیت تعمیم‌پذیری به این معناست که بتوان موارد مشاهده‌شده از ارتباط بین دو خصوصیت را به موارد مشاهده‌نشده تسری داد (Pollock, 1990). درخصوص تعیین کلاس مرجع مناسب، قدر متیقن این است که هرچه یک کلاس مرجع حاوی خصوصیات مرتبط بیشتری باشد، آنگاه کلاس مرجع مناسب‌تری خواهد بود. بنابراین اگر دو خصوصیت جنسیت و کشیدن سیگار را مرتبط با بروز حمله قلبی بدانیم، آنگاه کلاس مرجع زنان سیگاری، کلاس مرجع مناسب‌تری نسبت به کلاس مرجع زنان خواهد بود.

براساس نظریه استنتاج مستقیم برای تعیین احتمال معین گزاره‌ی مورد نظر مقدار احتمالی که از کلاس مرجع با اطلاعات مشخص‌تر استنتاج شده است، دارای اولویت می‌باشد. بنابراین احتمال معین گزاره‌ی "فرد A به حمله قلبی دچار خواهد شد" از احتمال نامعین اینکه چه میزان از زنان سیگاری به حمله قلبی دچار می‌شوند، قابل استنتاج خواهد بود. به‌طور مشخص نظریه استنتاج مستقیم به معنی امکان استنتاج احتمال معین یک گزاره از احتمال نامعین کلاس‌های مرجع مرتبط می‌باشد (Pollock, 1990).

حال به انتقاد ردمای از تامسون باز می‌گردیم. همان‌طور که بیان شد، انتقاد ردمای به تامسون بر دو پیش‌فرض بنا شده است. پیش‌فرض اول این بود که ردمای امکان استنتاج میزان تصادفات را بر اساس نرخ مالکیت اتوبوس‌ها موجه می‌دانست.

برای واکاوی بهتر انتقاد ردمای و با در نظر داشتن آموزه‌های پولاک درخصوص احتمال قانونی دو فرض برای به دست آوردن میزان تصادفات سالیانه هر شرکت تصور می‌کنیم. فرض اول این است که میزان تصادفات مرتبط با هر شرکت را بر اساس گزارش‌های سالیانه در اختیار داشته باشیم و با استفاده از آن بخواهیم نرخ تصادفات مرتبط با شرکت را در سالی که تصادف در آن به وقوع پیوسته است، محاسبه کنیم. در این صورت کلاس‌های مرجع متفاوتی وجود دارد که می‌توان از احتمال‌های نامعین آن‌ها برای محاسبه احتمال معین این گزاره که "اتوبوس برخوردکننده با خانم اسمیت آبی بوده است" استفاده کرد. به‌عنوان مثال فرض کنیم می‌دانیم که اتوبوس‌های آبی همگی از یک شرکت خودروساز مشخص خریداری شده‌اند. شرکت سازنده دارای آمار مشخصی از میزان تصادفات شهری

بر اساس ساعات کار می‌باشد. در اینجا می‌توان آمار مربوط به عملکرد اتوبوس‌های شرکت سازنده را به‌عنوان کلاس مرجع مرتبط در نظر گرفت و احتمال معین گزاره مورد نظر را از احتمال نامعین میزان تصادفات اتوبوس‌های شرکت سازنده استنتاج کرد. در این مثال، کلاس‌های مرجع دیگر مانند سن و میزان مهارت رانندگان را نیز می‌توان تصور کرد. اما از آنجایی که فرض پارادوکس‌های اثبات این بود که هیچ اطلاعات اضافی دیگری به‌جز نرخ مالکیت در اختیار نمی‌باشد. بنابراین نمی‌توانیم کلاس‌های مرجع بیان‌شده را به‌عنوان منشأ استنتاج در نظر بگیریم.

مطابق فرض پارادوکس‌های اثبات میزان تصادفات باید صرفاً بر اساس نرخ مالکیت استنتاج شود. گزاره‌ی مورد نظر را بازنویسی می‌کنیم " x (اتوبوس برخوردکننده) متعلق به شرکت آبی است". در اینجا احتمال معین مورد نظر، احتمال تعلق x به شرکت آبی می‌باشد. مطابق نظریه استنتاج مستقیم، احتمال معین گزاره‌ی مورد نظر باید از احتمال نامعین بین خصوصیات مرتبط قابل استنتاج باشد. همان‌طور که بیان شد برای این مقصود نیازمند کلاس‌های مرجعی هستیم که x به آن‌ها تعلق دارد، اما از آنجایی که مطابق فرض پارادوکس‌های اثبات هیچ اطلاعات دیگری به‌جز نرخ مالکیت اتوبوس‌ها در اختیار نداریم، بنابراین تنها کلاس مرجع که داده‌های آماری آن در اختیار می‌باشد، تعلق x به شرکت آبی است که همان موضوع گزاره مورد نظری است که می‌خواهیم احتمال معین آن را استنتاج کنیم. بنابراین احتمال معین گزاره‌ی " x متعلق به شرکت آبی است"، قابل استنتاج از احتمال نامعین بین خصوصیات نبوده و در نتیجه شرط استنتاج مستقیم برآورده نخواهد شد.

در این قسمت با استفاده از آموزه‌های پولاک به تبیین این امر پرداختیم که استدلال احتمالاتی از چه اجزائی تشکیل شده است و استنتاج یک داده آماری از تناوب‌های مرتبط مشاهده‌شده در چه صورتی می‌تواند به‌عنوان یک شاهد آماری موجه در نظریه‌های تصمیم‌گیری استفاده شود. این معیارها نشان داد که به چه دلیل استنتاج میزان تصادفات مرتبط با هر شرکت از صرف نرخ مالکیت آن شرکت نمی‌تواند موجه باشد. هر چند باید در نظر داشت که داده‌های آماری که معیارهای ارائه شده را برآورده می‌کنند، صرفاً مصداقی از یک استنتاج آماری صحیح می‌باشند. به بیان دقیق‌تر، معیارهای ارائه‌شده در مقام بیان این امر است که داده‌های آماری باید چگونه استنتاج شوند که دارای شرط لازم برای استفاده به‌عنوان دلیل اثباتی در دادگاه‌ها باشند و بررسی کفایت آن‌ها جهت اثبات محکومیت با

پارادوکس‌های اثبات: ... (محمد رضا هزاره و سید محمد مهدی اعتمادالاسلامی بختیاری) ۳۶۳

در نظر داشتن استانداردهای اثبات مربوطه و با توجه به شرایط مختص هر پرونده مشخص خواهد شد.

پیش فرض دوم استدلال رد ماین این بود که براساس تلقی تامسون از رابطه‌ی علی، همچنان می‌توان بین نرخ مالکیت و میزان تصادفات رابطه‌ی علی را برقرار دانست. به نظر می‌رسد انتقاد رد ماین به تامسون از این جهت که تلقی تامسون از رابطه‌ی علی به اندازه‌ی کافی روشن نیست، وارد باشد. به این منظور و در جهت برآورده شدن اشکال رد ماین با استفاده از الگوی علی وودوارد نشان می‌دهیم که چرا نمی‌توان رابطه‌ی بین دو متغیر نرخ مالکیت و میزان تصادفات را یک رابطه‌ی علی دانست.

۴. عدم برقراری رابطه‌ی علی میان نرخ مالکیت و میزان تصادفات در چارچوب الگوی علی وودوارد

مطابق یک تعریف ابتدایی از الگوی علی "علت واقعی" وودوارد، هرگاه مداخله در مقدار یک متغیر، باعث ایجاد تغییر در متغیر دیگر به نحو بازتولیدپذیر شود، آنگاه بین آن دو متغیر رابطه‌ی علی وجود خواهد داشت. مطابق تعریف وودوارد، امکان مداخله‌گری در یک رابطه منوط به برآورده شدن این دو شرط خواهد بود:

AC1: مقدار حقیقی X مساوی x و مقدار حقیقی Y مساوی y است (X و Y باید این قابلیت را داشته باشند که بتوان به آن‌ها مقادیر مختلف را اختصاص داد).

AC2: دست‌کم یک مسیر R بین X و Y وجود دارد که در آن، مداخله در X ، مقدار Y را تغییر خواهد داد، با این شرط که سایر علت‌های مستقیم Y مانند Z که در این مسیر نیستند، در مقدار واقعی خود ثابت نگه داشته شوند (این‌طور مفروض گرفته شده که تمام علت‌های مستقیم Y که در مسیرهای بین X و Y نیستند، در مقادیر واقعی خود تحت مداخلات X ثابت نگه داشته می‌شوند).

آنگاه $X=x$ علت واقعی $Y=y$ خواهد بود؛ اگر و تنها اگر هر دو شرط AC برآورده شود (Woodward, 2005).

با استفاده از این تعریف، اعمال تغییرات در خصوصیات شرکت آبی، باید باعث تغییر در میزان تصادفات مرتبط با شرکت آبی باشد. همان‌طور که در بخش قبل بیان شد، از آنجایی که در فرض پارادوکس‌های اثبات اطلاعات اضافی دیگری وجود ندارد تا آن‌ها را

به عنوان خصوصیات مرتبط در نظر بگیریم، بنابراین در رابطه‌ی بین متغیر نرخ مالکیت و میزان تصادفات خصوصیت مرتبطی وجود ندارد تا بتوان با مداخله در مقدار آن، میزان تصادفات مرتبط با شرکت آبی را دستخوش تغییر کرد.

ممکن است که این گونه استدلال شود که نرخ مالکیت خود به صورت یک خصوصیت بوده و تغییر آن باعث تغییر در میزان تصادفات خواهد شد. به عنوان مثال، اگر نرخ مالکیت شرکت آبی را به عنوان متغیر X در نظر گرفته و مقدار آن را از هفتاد به شصت کاهش دهیم، آنگاه میزان تصادفات شرکت آبی (متغیر Y) هم کاهش پیدا می‌کند. برای پاسخ به این استدلال باید در نظر داشت که مطابق تعریف وودوارد، مداخله در مقدار یک متغیر باید به نحو بازتولیدپذیر منجر به تغییر در مقدار متغیر دیگر شود. برای روشن شدن شرط بازتولیدپذیری و اینکه این شرط چگونه می‌تواند به عنوان یک تمایزدهنده‌ی رابطه‌ی علی، بین نرخ مالکیت صرف و میزان تصادفات را از شمول یک رابطه‌ی علی موجه خارج کند، ابتدا معیار بازتولیدپذیری را تعریف کرده و با استفاده از آن، رابطه‌ی بین این دو متغیر را در فرض پارادوکس‌های اثبات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۴ بازتولیدپذیری

به صورت کلی، معیار بازتولیدپذیری دلالت بر این امر دارد که مداخله در خصوصیات متغیر X باید مقدار متغیر Y را به صورت قاعده‌مند دچار تغییر کند، به نحوی که اعمال مداخلات مذکور به عنوان استراتژی برای ایجاد تغییرات در Y به حساب آید (Woodward, 2005).

فرض کنیم که یک سکه‌ی ناریب در اختیار داریم. با توجه به ناریب بودن سکه، احتمال شیر یا خط آمدن هر پرتاب از تقسیم حالت مطلوب به حالات ممکن به دست خواهد آمد. بنابراین اگر گزینه‌ی مطلوب آمدن شیر باشد، آنگاه احتمال اینکه در اولین پرتاب نتیجه شیر باشد، یک‌دوم خواهد بود. این امر برآمده از اصل عدم تفاوت در احتمالات است. بر اساس این اصل اگر هیچ دلیلی برای ترجیح دادن وقوع یک رویداد بر رویداد دیگر وجود نداشته باشد، باید به وقوع هر دو رویداد احتمال یکسانی اختصاص داده شود. در پرتاب سکه‌ی ناریب، اعمال مداخله بر روی مقدار متغیر X می‌تواند با اعمال تغییرات بر روی خصوصیات نحوه‌ی پرتاب صورت بگیرد؛ اگر اعمال این تغییرات به نحوی باشد که بتواند احتمال افزایش تعداد آمدن شیر را به نحو قاعده‌مند تغییر دهد.

اما اگر در آزمون پرتاب سکه هیچ‌گونه خصوصیت تمایزدهنده که باعث برتری احتمال وقوع یک رویداد بر رویداد دیگر باشد، متصور نباشد، آنگاه با استفاده از قانون اعداد بزرگ در احتمالات می‌دانیم که احتمال وقوع مشاهدات سازگار با پیش‌بینی انجام‌شده همان یک‌دوم کل دفعات پرتاب خواهد بود. در ادامه برای روشن‌تر شدن بیشتر بحث از شاخص AUC (Area under curve) به‌عنوان کمیتی که نشان‌دهنده‌ی میزان بازتولیدپذیری بین دو متغیر است، استفاده می‌کنیم.

AUC شاخصی است که نشان می‌دهد که نسبت مشاهده مصادیق تصادفی متغیر Y که با متغیر X سازگار باشند نسبت به مشاهده مصادیق تصادفی متغیر Y که با متغیر X ناسازگار هستند چقدر خواهد بود. مقدار این شاخص از ۰ تا ۱ متغیر بوده و اگر مقدار آن برای دو متغیر در بازه ۰/۵ تا ۱ باشد بیانگر این است که ارتباط بین دو متغیر X و Y قاعده‌مند بوده و مداخلات بر روی X متغیر Y را به نحو بازتولیدپذیر دستخوش تغییر خواهد کرد. اگر مقدار این شاخص برابر با ۰/۵ باشد، نشان می‌دهد که رابطه‌ی بین دو متغیر حدس تصادفی بوده و در نتیجه نمی‌توان اعمال مداخلات بر روی متغیر X را به‌عنوان استراتژی برای ایجاد تغییر بر روی متغیر Y به حساب آورد. شاخص AUC از محاسبه‌ی سطح زیر نمودار ROC (Receiver operating characteristic) به دست می‌آید. نمودار ROC یک منحنی است که عملکرد باینری یک مدل‌سازی را نشان می‌دهد. محور X این نمودار متغیر نرخ مثبت کاذب (FPR) و محور Y آن متغیر نرخ مثبت صادق (TPR) می‌باشد. نرخ مثبت صادق همان حساسیت و نرخ مثبت کاذب از تفریق شاخص ویژگی از یک به دست می‌آید (Sant, 2025). (specificity)

در مثال پرتاب سکه‌ی نااریب بدون هیچ‌گونه اطلاعات تمایزدهنده، احتمال اینکه نتیجه پرتاب شیر یا خط باشد یکسان و برابر با ۱/۲ می‌باشد. اگر آمدن شیر را (۱) و آمدن خط را (۰) در نظر بگیریم، آنگاه $P(Y=1) = P(Y=0) = 0.5$ خواهد بود. براساس فرض آزمون که مطلوب آن آمدن شیر است، متغیر $q(t)$ را محاسبه می‌کنیم. این متغیر نشان می‌دهد که تعداد مشاهده مصادیق سازگار با پیش‌بینی که در اینجا دفعات پرتابی است که نتیجه‌ی آن شیر است، چه مقدار خواهد بود $q(t) = P(S \geq t)$. در اینجا مقدار متغیر S تعداد مصادیق مطلوب آزمون است که در واقعیت مشاهده شده است و مقدار متغیر t تعداد مصادیق مورد انتظار می‌باشد. بنابراین هرچه تعداد مشاهدات مصادیق منطبق با مطلوب آزمون بیشتر باشد، مقدار متغیر $q(t)$ برای $P(\text{predict}=1 | Y=1)$ از مقدار آن برای $P(\text{predict}=1 | Y=0)$ بزرگ‌تر است. در

مقابل، اگر پیش‌بینی‌کننده حاوی اطلاعات تمایزدهنده نباشد، آنگاه $P(\text{predict}=1 | Y=1) = P(\text{predict}=1 | Y=0) = q(t)$ خواهد بود.

برای به دست آوردن متغیر نرخ مثبت صادق (TPR) و متغیر نرخ مثبت کاذب (FPR) باید ابتدا متغیرهای چهارگانه مثبت صادق (True positive)، مثبت کاذب (False positive)، منفی صادق (True negative) و منفی کاذب (false negative) محاسبه شوند. اگر تعداد کل پرتاب‌ها را برابر با N در نظر بگیریم، با توجه به فرض مثال تعداد مصادیق سازگار با پیش‌بینی و مصادیق ناسازگار با پیش‌بینی هر دو برابر با $N/2$ خواهند بود:

- مثبت صادق: تعداد مصادیقی که نتیجه‌ی پرتاب سکه شیر آمده است و پیش‌بینی ما هم آمدن شیر بوده است $q(t) \times N_{\text{pos}} = q(t) \times (N/2)$

- مثبت کاذب: تعداد مصادیقی که نتیجه پرتاب سکه خط آمده است و پیش‌بینی ما آمدن شیر بوده است $q(t) \times N_{\text{neg}} = q(t) \times (N/2)$

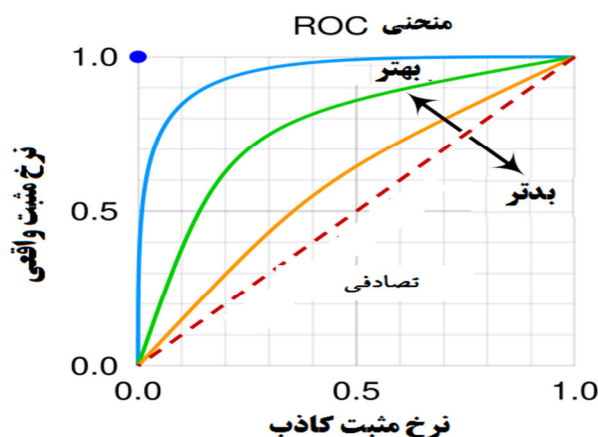
- منفی صادق: تعداد مصادیقی که نتیجه پرتاب سکه خط آمده است و پیش‌بینی ما آمدن خط بوده است $(1 - q(t)) \times N_{\text{pos}} = (1 - q(t)) \times (N/2)$

- منفی کاذب: تعداد مصادیقی که نتیجه پرتاب سکه شیر بوده است و ما آمدن خط را پیش‌بینی کرده‌ایم $(1 - q(t)) \times N_{\text{neg}} = (1 - q(t)) \times (N/2)$

با استفاده از این اطلاعات، حساسیت و ویژگی با استفاده از فرمول‌های ذیل محاسبه می‌شود:

$$\text{حساسیت} = \frac{\text{تعداد مثبت های صادق}}{\text{تعداد مثبت های صادق + تعداد منفی های کاذب}} \quad (۱)$$

$$\text{ویژگی} = \frac{\text{تعداد منفی صادق}}{\text{تعداد منفی صادق + تعداد مثبت کاذب}} \quad (۲)$$



نمودار ۱. منحنی ROC
(Cmglee & MartinThoma, 2018)

از آنجایی که پیش‌بینی انجام‌شده حاوی هیچ‌گونه اطلاعات تمایزدهنده نمی‌باشد، بنابراین: $P(\text{predict}=1 | Y=1) = P(\text{predict}=1 | Y=0) = q(t)$ بوده و در این صورت با جایگذاری مقادیر متغیرهای چهارگانه هر دو متغیر TPR و FPR برابر با $q(t)$ می‌باشند. برابری این دو متغیر نشان می‌دهد که نمودار ROC قطری بوده و مقدار AUC برابر با نیم است که دلالت بر این دارد که رابطه‌ی بین دو متغیر پرتاب سکه نأریب و اینکه نتیجه‌ی پرتاب، شیر باشد در فرض عدم هرگونه اطلاعات تمایزدهنده غیربازتولیدپذیر می‌باشد (Sant, 2025).

۲.۴ عدم برآورده شدن شرط بازتولیدپذیری در داده‌های آماری صرف

به مثال اتوبوس آبی بازمی‌گردیم و از دو فرض مطرح‌شده استفاده می‌کنیم. در فرض اول مطابق فرض پارادوکس‌های اثبات تنها نرخ مالکیت را در اختیار داریم؛ بنابراین برای پیش‌بینی میزان تصادفات مرتبط با شرکت آبی صرفاً از نرخ مالکیت شرکت آبی می‌توانیم استفاده کنیم. بر اساس آن، ۷۰ درصد تصادف‌ها مربوط به شرکت آبی و ۳۰ درصد آن‌ها مربوط به شرکت قرمز خواهد بود. در اینجا نیز مشابه مثال پرتاب سکه، به این علت که پیش‌بینی انجام‌شده فاقد هرگونه اطلاعات تمایزدهنده است، مقدار هر دو متغیر نرخ مثبت کاذب و نرخ مثبت صادق برابر با یکدیگر خواهد بود. بنابراین نمودار ROC قطری بوده که نشان می‌دهد ارتباط بین دو متغیر نرخ مالکیت شرکت آبی و میزان تصادفات غیربازتولیدپذیر می‌باشد.

اما اگر فرض کنیم که تعداد تصادف‌های مرتبط با هر شرکت را در سال گذشته بر اساس اطلاعات میدانی در اختیار داریم، حال اگر بر اساس این داده آماری بخواهیم میزان تصادفات مرتبط با هر شرکت را در سال جاری محاسبه کنیم، آنگاه وضعیت چگونه خواهد بود؟ در این صورت، برخلاف حالتی که میزان تصادفات را صرفاً براساس نرخ مالکیت پیش‌بینی می‌کردیم، دیگر لزوماً میزان تصادفات برابر با نرخ مالکیت نمی‌باشد؛ زیرا خصوصیتی تأثیرگذاری در متغیر X وجود دارد که باعث خواهند شد که میزان تصادفات سال گذشته متفاوت با میزان نرخ مالکیت هر شرکت باشد. به‌عنوان مثال، میزان مهارت رانندگان هر شرکت و یا میزان نظارت شرکت‌ها بر رعایت مسائل ایمنی از سوی رانندگان باعث تغییر در نرخ تصادفات اتوبوس‌های هر شرکت خواهد بود. بر همین اساس، اعمال مداخله در این خصوصیات می‌تواند میزان تصادفات سالانه‌ی مرتبط با هر شرکت را به نحو قاعده‌مند دستخوش تغییر کند. به‌عنوان مثال، فرض کنیم که گزارش میزان تصادفات در سال ۲۰۲۳ نشان می‌دهد که ۷۰ درصد تصادف‌های گزارش‌شده مرتبط با شرکت آبی بوده است. پس از آن، شرکت آبی با ارتقاء سیستم ترمزهای اتوبوس‌های خود توانسته است میزان تصادفات مرتبط با آن شرکت را در سال ۲۰۲۴ به ۶۰ درصد کاهش دهد. حال فرض کنیم بر اساس میزان تصادف‌های سالیانه گزارش‌شده در سال ۲۰۲۳ میزان تصادفات مرتبط با هر شرکت را در سال ۲۰۲۴ پیش‌بینی کرده باشیم که بر این اساس، پیش‌بینی ما این‌گونه بوده است که ۷۰ درصد تصادف‌ها مرتبط با شرکت آبی و ۳۰ درصد مرتبط با شرکت قرمز است. بر اساس این پیش‌بینی و با در اختیار داشتن میزان تصادف‌های گزارش‌شده در سال ۲۰۲۴ متغیرهای مؤثر در تعیین مقدار شاخص AUC به شرح ذیل تعیین می‌شوند:

- **مثبت صادق:** بر اساس داده‌های آماری مربوط به سال ۲۰۲۳ پیش‌بینی کرده‌ایم که در ۷۰ درصد تصادفات مربوط به اتوبوس‌های شهری در سال ۲۰۲۴ شرکت آبی مسئول است. با در نظر گرفتن این نکته که بر اساس گزارش‌های مربوط به سال ۲۰۲۴، از مجموع ۱۰۰ تصادف گزارش‌شده، تعداد ۶۰ تصادف مرتبط با شرکت آبی بوده است؛ در نتیجه مثبت صادق برابر با ۶۰ می‌باشد.

- **مثبت کاذب:** بر اساس داده‌های آماری مربوط به سال ۲۰۲۳ پیش‌بینی کرده‌ایم که در ۷۰ درصد تصادفات مربوط به اتوبوس‌های شهری در سال ۲۰۲۴ شرکت آبی مسئول است. با در نظر گرفتن این نکته که بر اساس گزارش‌های مربوط به سال

پارادوکس‌های اثبات: ... (محمد رضا هزاره و سید محمد مهدی اعتمادالاسلامی بختیاری) ۳۶۹

۲۰۲۴، از مجموع ۱۰۰ تصادف گزارش شده، تعداد ۶۰ تصادف مرتبط با شرکت آبی بوده است؛ در نتیجه مثبت کاذب برابر با ۱۰ می‌باشد.

- **منفی صادق:** بر اساس داده‌های آماری مربوط به سال ۲۰۲۳ پیش‌بینی کرده‌ایم که در ۳۰ درصد تصادفات مربوط به اتوبوس‌های شهری در سال ۲۰۲۴ شرکت آبی مسئول نیست. با در نظر گرفتن این نکته که بر اساس گزارش‌های مربوط به سال ۲۰۲۴، از مجموع ۱۰۰ تصادف گزارش شده، تعداد ۴۰ تصادف مرتبط با شرکت قرمز بوده است؛ در نتیجه منفی صادق برابر با ۳۰ می‌باشد.

- **منفی کاذب:** بر اساس داده‌های آماری مربوط به سال ۲۰۲۳ پیش‌بینی کرده‌ایم که در ۳۰ درصد تصادفات مربوط به اتوبوس‌های شهری در سال ۲۰۲۴ شرکت آبی مسئول نیست. با در نظر گرفتن این نکته که بر اساس گزارش‌های مربوط به سال ۲۰۲۴، از مجموع ۱۰۰ تصادف گزارش شده، تعداد ۴۰ تصادف مرتبط با شرکت قرمز بوده است؛ در نتیجه منفی کاذب برابر با صفر می‌باشد.

با توجه به این اطلاعات، دو مقدار حساسیت و ویژگی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{SENSITIVITY} = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{60}{60 + 0} = (1) \quad (3)$$

$$\text{SPECIFICITY} = \frac{TN}{TN + FP} = \frac{30}{30 + 10} = \left(\frac{3}{4}\right) \rightarrow (1 - \text{SPECIFICITY}) = \left(\frac{1}{4}\right) \quad (4)$$

در ادامه می‌توانیم تصور کنیم که با ارتقاء هر چه بیشتر سیستم ترمزهای اتوبوس‌های شرکت آبی به نحو پایدار میزان سهم تصادفات مرتبط با آن شرکت کاهش خواهد یافت. در این صورت، می‌توانیم بر اساس داده‌های به‌دست‌آمده از گزارش‌های هر سال از یکسو و ارتقاء سیستم ترمزهای اتوبوس‌های آبی از سوی دیگر، میزان تصادف‌های مرتبط با سال آینده را پیش‌بینی کرده و بر اساس مشاهدات حاصله نمودار ROC مربوط به دو متغیر قدرت ترمزهای اتوبوس‌های آبی و میزان تصادفات سالیانه شرکت آبی را ترسیم کرده و بر اساس آن، شاخص AUC را محاسبه نماییم. در این صورت، بر اثر اطلاعات اضافی استفاده شده مقادیر حساسیت و ویژگی متفاوت از یکدیگر بوده و در نتیجه مقدار AUC برابر با نیم نخواهد شد که نشان می‌دهد رابطه‌ی بین این دو متغیر بازتولیدپذیر می‌باشد، اما اضافه کردن این اطلاعات مستلزم تخطی از صورت مسئله پارادوکس‌های اثبات می‌باشد.

از سوی دیگر، فرض کنیم در مثال اتوبوس، شاهد عینی صحنه تصادف را مشاهده کرده است. اگر شاهد مذکور فردی با نزدیک‌بینی متوسط بوده و در فاصله ۱۰۰ متری صحنه تصادف ایستاده باشد و همچنین با در نظر گرفتن میزان نور در خیابان موردنظر در لحظه وقوع تصادف و با استفاده از محاسبات آماری بر مبنای این اطلاعات درمی‌یابیم که احتمال خطای شاهد در تشخیص رنگ اتوبوس ۳۰ درصد است. در اینجا دو متغیر شاهد و منشأ ایجاد آن را در نظر می‌گیریم. هر گونه تغییر در شرایط ایجادکننده شهادت شاهد باعث تغییر در احتمال صدق شاهد مذکور به نحو قاعده‌مند خواهد شد. به عنوان مثال، با تغییر فاصله شاهد از صحنه‌ی جرم، احتمال خطای شاهد به صورت قاعده‌مند دچار تغییر می‌شود. بنابراین تغییر در فاصله شاهد از صحنه‌ی جرم، می‌تواند به عنوان یک استراتژی برای تغییر در میزان ارزش اثباتی شاهد به حساب آید، در صورتی که در شواهد آماری صرف فاقد امکان این گونه مداخله‌گری می‌باشیم.

ردماین با این استدلال که می‌توان بین نرخ مالکیت و نرخ تصادفات رابطه‌ی علی را برقرار دانست، نظر تامسون را مبنی بر اینکه وجود رابطه‌ی علی بین شاهد و منشأ آن، وجه تمایز شواهد آماری صرف و سایر ادله اثباتی است، موجه نمی‌دانست. تا این جای بحث با ارائه تعریف دقیق از رابطه‌ی علی نشان دادیم برخلاف نظر ردماین رابطه بین نرخ مالکیت و نرخ تصادفات در صورت پابندی به صورت مسئله پارادوکس‌های اثبات نمی‌تواند مصداقی از یک رابطه‌ی علی باشد.

ممکن است استدلال شود در فرض دوم که با در نظر گرفتن نرخ تصادفات سالیانه مرتبط با سال گذشته و تخطی از پارادوکس‌های اثبات رابطه دو متغیر را بازتولیدپذیر دانستیم، همچنان محکومیت متهم بر اساس آن محل تردید است. باید به این مسئله توجه داشت که بر مبنای تفسیر احتمالاتی از استانداردهای اثبات، باید ارزش اثباتی شواهد ارائه شده در دادگاه تعیین شود تا بر اساس آن و با استفاده از قضیه بیز درجه باور تصمیم‌گیرنده را به صدق گزاره مبنای حکم محاسبه نماییم. در ادامه، یک صورت خاص از قضیه بیز را که دی‌بلو پیشنهاد می‌دهد، بر اساس مثال اتوبوس آبی بازنویسی می‌کنیم، در نظر می‌گیریم (Di Bello, 2019). در این فرمول، B بازنمایی‌کننده اثر اطلاعات پیش‌زمینه‌ای (Background Knowledge)؛ G فرضیه‌ی مسئول بودن شرکت آبی؛ I فرضیه‌ی مسئول بودن شرکت قرمز؛ stat[70:30] نسبت تعداد اتوبوس‌های شرکت آبی به شرکت قرمز است:

$$\frac{Pr(G|stat[70:30] \wedge B)}{Pr(I|stat[70:30] \wedge B)} = \frac{Pr(stat[70:30]|G \wedge B)}{Pr(stat[70:30]|I \wedge B)} \cdot \frac{Pr(G|B)}{Pr(I|B)} \quad (5)$$

در مثال اتوبوس بر اساس داده آماری نرخ مالکیت و با فرض امکان استنتاج، احتمال اینکه اتوبوس برخوردکننده با عابر آبی بوده باشد، ۷۰ درصد خواهد بود. این مقدار، همان احتمال پسینی مسئول بودن شرکت آبی با توجه به شاهد آماری نرخ مالکیت می‌باشد. برای به دست آوردن ارزش اثباتی شاهد مذکور ابتدا نیاز داریم احتمال پیشینی (Prior Probability) را تعیین کنیم. احتمال پیشینی، احتمال صدق فرضیه بدون در نظر گرفتن اثر شاهد مورد نظر می‌باشد. اما از آنجایی که مطابق فرض پارادوکس‌های اثبات، هیچ اطلاعات پیش‌زمینه‌ای وجود ندارد که بتوان بر اساس آن، احتمال پیشینی را تعیین کرد؛ در نتیجه، امکان تعیین ارزش اثباتی شاهد وجود ندارد. با پیروی از استدلال دی‌بلو چند حالت متفاوت را برای تعیین احتمال پیشینی متصور می‌شویم. در حالت اول، فرض می‌کنیم که می‌دانیم رانندگان هر دو شرکت به یک اندازه مهارت در رانندگی دارند. در این صورت، نسبت احتمال پیشینی $\left(\frac{Pr(G|B)}{Pr(I|B)}\right)$ برابر با یک خواهد بود و نسبت راستی‌نمایی (Likelihood ratio) $\left(\frac{Pr(stat[70:30]|G \wedge B)}{Pr(stat[70:30]|I \wedge B)}\right)$ شاهد ۷۰ درصد می‌باشد. در حالت دوم، این گونه فرض می‌کنیم که بررسی سوابق رانندگان دو شرکت به ما می‌گوید که میزان گزارش رانندگی در حین مستی در میان رانندگان شرکت آبی چهار برابر رانندگان شرکت قرمز می‌باشد. در این صورت، نسبت احتمال پیشینی مقصر بودن شرکت آبی ۸۰ درصد بوده و نسبت راستی‌نمایی حدوداً ۲۰ درصد می‌باشد. در حالت سوم، فرض می‌کنیم که نرخ تصادفات مربوط به سال گذشته نشان می‌دهد که ۷۰ درصد تصادف‌های گزارش شده از اتوبوس‌های شهری در سال گذشته متعلق به شرکت آبی بوده است که در این صورت، نسبت راستی‌نمایی برابر با یک می‌باشد. بنابراین، بر اساس هر کدام از این حالات، مقدار راستی‌نمایی شاهد آماری نرخ مالکیت متفاوت خواهد بود که نشان می‌دهد تعیین ارزش اثباتی شاهد مورد نظر تنها در صورت وجود دانش پیش‌زمینه‌ای امکان‌پذیر خواهد بود؛ امری که در مثال‌های پارادوکس‌های اثبات غایب مطلق فرض شده است. ممکن است این گونه استدلال شود که می‌توان شرایط پیش‌زمینه‌ای را یکسان در نظر گرفت، اما مسئله این است که فرض ثبات همه شرایط خود به‌صورت ضمنی حاوی اطلاعات پیش‌زمینه‌ای بسیاری مانند یکسان بودن مهارت رانندگان یا یکسان بودن وضعیت ایمنی خودروهای هر شرکت خواهد بود که در مثال‌های پارادوکس‌های اثبات آن‌ها را در اختیار نداریم.

در مقابل، مطابق فرض دوم که سابقه تصادفات در سال گذشته، به عنوان شاهد آماری در نظر گرفته شده است، به علت اضافه شدن اطلاعات پیش زمینه‌ای امکان تعیین نسبت راستی‌نمایی شاهد وجود دارد. باید در نظر داشت که ممکن است نسبت راستی‌نمایی مذکور که همان ارزش اثباتی شاهد است، نتواند احتمال پسینی (Posterior Probability) را به اندازه‌ای افزایش دهد که مقدار آن از استاندارد اثبات مرتبط تجاوز کند. در اینجا باید به این نکته توجه داشت که وجود رابطه‌ی علی بین یک شاهد و منشأ آن، ضرورتاً به این معنا نیست که محکومیت بر اساس آن شاهد موجه خواهد بود، بلکه نشان‌دهنده این است که چرا در مثال‌های پارادوکس‌های اثبات علی‌رغم تجاوز احتمال صدق در شواهد آماری صرف از استانداردهای اثبات مرتبط همچنان محکومیت بر اساس آن‌ها با شهود ما ناسازگاری باشد. پس اگر یک شاهد آماری معیار بازتولیدپذیری را برآورده کرده و مطابق استدلال تامسون بین شاهد و منشأ آن رابطه‌ی علی برقرار باشد، صرفاً می‌تواند واجد ارزش اثباتی به حساب آید، اما اینکه آیا ارزش اثباتی آن به اندازه‌ای خواهد بود که درجه باور تصمیم‌گیرنده را از مقادیر به دست آمده از تفسیر احتمالاتی استاندارد اثبات فزونی دهد، بستگی به اطلاعات مختص هر پرونده و استاندارد اثبات مرتبط خواهد داشت.

از سوی دیگر، ممکن است این گونه استدلال شود که به تناسب مداخله بر روی نرخ مالکیت احتمال مسئول بودن شرکت آبی هم دچار تغییر خواهد شد. به عنوان مثال، اگر نرخ مالکیت را از ۷۰ درصد به ۶۰ درصد کاهش دهیم، احتمال مسئولیت شرکت آبی نیز به همان اندازه کاهش خواهد یافت؛ بنابراین می‌توان این رابطه را برآورده‌کننده معیار بازتولیدپذیری دانست. برای پاسخ به این انتقاد از این مثال استفاده می‌کنیم. فرض کنیم در آزمون پرتاب تاس بدون هیچ گونه اطلاعات تمایزدهنده از نحوه پرتاب، مطلوب آزمون را آمدن عدد شش در نظر بگیریم. اصل عدم تفاوت در احتمالات به ما می‌گوید در این صورت احتمال آمدن مطلوب از تقسیم حالات مطلوب به حالات ممکن به دست می‌آید؛ بنابراین در این صورت احتمال آمدن شش، یک‌ششم خواهد بود. حال اگر x را متغیر پرتاب تاس و y را احتمال آمدن مطلوب در نظر بگیریم، با توجه به اینکه هیچ گونه خصوصیتی از متغیر x در اختیار نداریم؛ بنابراین امکان مداخله بر متغیر X وجود نخواهد داشت که نشان می‌دهد رابطه مذکور بازتولیدپذیر نمی‌باشد. حال اگر فرض کنیم که مطلوب آزمون را به جای آمدن عدد شش، به آمدن عدد پنج و شش تغییر دهیم، در این صورت، احتمال وقوع مطلوب به یک‌سوم تغییر خواهد کرد. اما این تغییر از مداخله بر

روی خصوصیات متغیر X حاصل نشده است، بلکه تغییر محتوی متغیر Y به صورت مستقیم است. بر این اساس نمی‌توان مداخله در نرخ مالکیت و تغییر در احتمال مسئولیت را مصداقی از بازتولیدپذیر شدن رابطه بین دو متغیر دانست.

انتقاد اصلی رد ماین علیه پیشنهاد تامسون این بود که می‌توان رابطه بین دو متغیر نرخ مالکیت و نرخ تصادفات را یک رابطه‌ی علی دانست، بنابراین استدلال تامسون نتوانسته وجه تمایز مناسبی برای توجیه ناسازگاری شهودی در خصوص محکومیت بر اساس داده‌های آماری صرف ارائه کند. در این بخش با تعریف دقیق از رابطه‌ی علی نشان دادیم که در صورت رعایت فرض‌های پارادوکس‌های اثبات نمی‌توانیم بین نرخ مالکیت صرف و نرخ تصادفات رابطه‌ی علی برقرار بدانیم. در نتیجه استدلال تامسون مبنی بر عدم وجود رابطه‌ی علی در شواهد مثال‌های پارادوکس‌های اثبات، به درستی توجیه می‌کند که چرا شهود ما با مبنا قرار گرفتن این دلایل به عنوان مبنای محکومیت ناسازگار است.

۵. نتیجه‌گیری

تامسون در مواجهه با پارادوکس‌های اثبات، وجود رابطه‌ی علی بین شاهد و منشأ ایجاد آن را وجه تمایز شواهد آماری صرف و سایر شواهد اثباتی می‌دانست. در مقابل رد ماین استدلال نمود از آنجایی که تلقی تامسون از رابطه‌ی علی مورد نظر به اندازه‌ی کافی روشن نیست، می‌توان در شواهد آماری صرف نیز رابطه‌ی علی را برقرار دانست. بر اساس استدلال او مطابق با تلقی تامسون، همچنان بین نرخ مالکیت اتوبوس‌های شرکت آبی و میزان تصادفات مرتبط با آن شرکت رابطه‌ی علی متصور است. استدلال رد ماین بر دو پیش‌فرض اصلی استوار است. پیش‌فرض اول اینکه می‌توان احتمال مرتبط با تصادفات هر شرکت را از نرخ مالکیت آن شرکت استنتاج کرد. با استفاده از آموزه‌های پولاک نشان دادیم که استنتاج مذکور از آن جهت که معیارهای لازم برای یک احتمال قانونی را برآورده نمی‌کند، موجه نبوده و نمی‌توان آن را به عنوان مبنایی برای تصمیم‌گیری در نظر گرفت. پیش‌فرض دوم رد ماین این بود که با توجه به تلقی تامسون از رابطه‌ی علی همچنان می‌توان بین نرخ مالکیت و میزان تصادفات هر شرکت رابطه‌ی علی را برقرار دانست. انتقاد رد ماین از این لحاظ که تلقی تامسون از رابطه‌ی علی به اندازه‌ی کافی دقیق نبوده است، موجه به نظر می‌رسد. در ادامه، به پشتوانه الگوی علی وودوارد و به‌طور مشخص معیار بازتولیدپذیری آن نشان دادیم که تمایزی آشکار بین شواهد آماری صرف و سایر ادله اثباتی

وجود دارد. عدم وجود رابطی علی بین شاهد و منشأ ایجاد آن بر مبنای الگوی علی وودوارد نشان می‌دهد که برتری شهودی محکومیت بر اساس سایر شواهد اثباتی در مقایسه با شواهد آماری صرف موجه بوده و شهود ما در این خصوص نیازمند بازنگری نخواهد بود.

پی‌نوشت‌ها

۱. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به: Schoeman, 1987 و Roth, 2010 مراجعه کنید.
۲. برای مطالعه‌ی بیشتر در خصوص این موضوع رجوع شود به: هزاره و اعتمادالاسلامی، ۱۴۰۳.

کتاب‌نامه

هزاره، محمدرضا؛ اعتمادالاسلامی بختیاری، سید محمد مهدی (۱۴۰۳). «اصلاحیه دی‌بلو بر راه حل اسمیت برای پارادوکس‌های اثبات»، *اندیشه فلسفی*، ۵ (۱): ۸۱-۹۵. <http://jpt.modares.ac.ir/article-34-79377-fa.html>

- Cmglee & MartinThoma. (2018). *Roc curve.svg* [Diagram]. Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Roc_curve.svg.
- Di Bello, M. (2019). "Trial by statistics: Is a high probability of guilt enough to convict? ". *Mind*, 128(512), 1045–1084. <https://doi.org/10.1093/mind/fzy026>
- Di Bello, M. (2020). "Proof paradoxes and normic support: Socializing or relativizing? ". *Mind*, 129(516), 1269–1285. <https://doi.org/10.1093/mind/fzz021>
- Duff, R. A., Farmer, L., Marshall, S., & Tadros, V. (2007). *The trial on trial: Towards a normative theory of the criminal trial* (Vol. 3), Oxford: Hart Publishing.
- Hamer, David. (2004). "Probabilistic standards of proof, their complements and the errors that are expected to flow from them". *University of New England Law Journal*, 1(1): 71-107.
- Moss, Sarah. (2018). *Probabilistic Knowledge*, Oxford: Oxford University Press.
- Nesson, Charles R. (1979). "Reasonable Doubt and Permissive Inferences: The Value of Complexity". *Harvard Law Review*, 92(6), 187-1225.
- Pollock, J. L. (2001). "Defeasible reasoning with variable degrees of justification". *Artificial Intelligence*, 133(1–2), 233–282. [https://doi.org/10.1016/S0004-3702\(01\)00145-X](https://doi.org/10.1016/S0004-3702(01)00145-X)
- Pollock, John L. (1990). *The Theory of Nomic Probability II*, Oxford.
- Redmayne, M. (2008). "Exploring the proof paradoxes". *Legal Theory*, 14(4), 281–309. <https://doi.org/10.1017/S1352325208080117>

- Reichenbach, H. (1949). *The theory of probability: An inquiry into the logical and mathematical foundations of the calculus of probability*, University of California Press.
- Roth, A. (2010). "Safety in numbers? Deciding when DNA alone is enough to convict". *New York University Law Review*, 85(4), 1130–1185. <https://nyulawreview.org/issues/volume-85-number-4/safety-in-numbers-deciding-when-dna-alone-is-enough-to-convict>
- Sant, L. (2025). History and Philosophy of Probability: From Ancient Games to Modern Theories. In M. Lovric (Ed.), *International Encyclopedia of Statistical Science* (pp. 1116–1125), Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-69359-9_210
- Schoeman, F. (1987). "Statistical vs. direct evidence". *Noûs*, 21(2), 179–198. <https://doi.org/10.2307/2214913>
- Thomson, J. J. (1986). *Liability and individualized evidence*. In W. Parent (Ed.), *Rights, restitution, and risk: Essays in moral theory* (pp. 199–219), Harvard University Press.
- Wells, Gary L. (1992). "Naked Statistical Evidence of Liability: Is Subjective Probability Enough?". *Journal of Personality and Social Psychology*, 62(5), pp. 793–52.
- Williams, Glanville 1979: "The Mathematics of Proof, parts I and II". *Criminal Law Review*, pp. 297–312, 340–54.
- Woodward, J. (2005). *Making things happen: A theory of causal explanation*, Oxford university press.