

خوارزمی نظریه پرداز معادلات درجه دوم

جعفر آقایانی چاوشی*

چکیده

محمد بن موسی خوارزمی ریاضی دان بلندآوازه ایرانی در قرن سوم هجری علمی را برای نخستین بار صورت بندی و تدوین کرد که خود آن را «جبر و مقابله» نامید؛ علمی که تمام شرایط یک دانش واقعی را داشت، یعنی همان که اروپاییان از آن به «ساینس» تعبیر می کنند.

این ریاضی دان با استفاده از این دانش نوپا توانست همه معادلات درجه دوم زمانش را حل و راه را برای حل معادلات درجه بالاتر هموار کند.

بر اساس الواح بابلی و آثار برجای مانده از محاسبه گران هندی در عهد باستان، مردمان بابل و هند به حل حالات خاصی از معادلات درجه دوم موفق شده بودند، اما آن ها راه حل های خود را فقط به صورت دستور ارائه کردند؛ یعنی این راه حل ها، که برای رفع نیازهای زندگی روزمره آنان ارائه شده بودند و نه به منظور گسترش دانش ریاضی، فاقد براهین علمی بودند. ابتکار خوارزمی در آن است که وی نخست همه معادلات درجه دوم شناخته شده زمانش را بررسی می کند؛ در مرحله دوم روش حل هریک از آن ها را ارائه می دهد؛ سرانجام در مرحله سوم، این روش ها را با کمک علم هندسه اثبات می کند؛ مؤلفه هایی که در مجموع علم جدیدی به نام «جبر» را تشکیل می دهند. این علم، که از طریق ترجمه های لاتینی کتاب خوارزمی در قرون وسطی به اروپا راه یافت، هم در قرون وسطی و هم در عصر رنسانس تحول بزرگی در علم ریاضیات را موجب شد، چنان که در قرن شانزدهم میلادی تارتاگلیا و کاردان، ریاضی دانان ایتالیایی که با ترجمه لاتینی جبر و مقابله، آشنا بودند روش این ریاضی دان ایرانی را برای حل معادله درجه سوم تعمیم دادند و بدین ترتیب گام دیگری در گسترش ریاضیات برداشتند.

* استادیار گروه فلسفه علم، دانشگاه صنعتی شریف jchavoshi@hotmail.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۱۲/۱۶، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۲/۱۱

در این مقاله کوشیده‌ایم چگونگی تکوین علم جبر را نشان دهیم و تأثیر آن را در اروپا بررسی کنیم.

کلیدواژه‌ها: خوارزمی، جبر و مقابله، نظریه علمی، معادلات درجه دوم.

۱. مقدمه

چنان‌که اشاره کردیم خوارزمی با کتاب جبر و مقابله خود علمی را پایه‌ریزی کرد که پیش از وی سابقه نداشت. ارزش این ابتکار، یا به تعبیر بهتر اختراع، چه از نظر علمی و چه از نظر فرهنگی و نژادی بیش از آن است که به‌تصور آید؛ زیرا این علم استدلالی و دقیق اصل موضوعه «علم اروپایی» را، که عده‌ای از متفکران غربی بنا نهاده بودند و از آن برای برتری نژاد اروپایی بر نژادهای دیگر سود می‌جستند، به چالش می‌کشید.

لازم به یادآوری است که فلاسفه نژادپرست غربی از دیرباز علم شرقی، به‌ویژه علم اسلامی، و به تعبیر خود آن‌ها «علم عرب» را مقابل «علم اروپایی» قرار داده و بر این باور بودند که علم اسلامی محصول تجارب روزمره است و با شهود و حدس دست به‌گیریان. بنابراین، توانایی برابری با «علم اروپایی» را ندارد که مبتنی بر فرضیه‌های علمی، مفاهیم روشن و منسجم، روش‌شناسی اثباتی، و خلاصه تجربیات دقیق آزمایشگاهی است.^۱ از سوی دیگر، علم اروپایی، که برخاسته از تمدن یونان باستان است، قرن‌ها بعد در همین اروپا نشو و نمو کرده است و توسط دانشمندان اروپایی به دیگر نقاط جهان راه یافته است.

برای مثال ارنست رنان، فیلسوف فرانسوی قرن نوزدهم میلادی، درباره علم و فلسفه در شرق چنین نوشته است:

در علم و فلسفه ما کاملاً یونانی هستیم. جست‌وجوی علت‌ها و دانستن برای دانستن چیزی است که جز در یونان در هیچ‌جای دیگر وجود ندارد، همان چیزی که ما فقط و فقط از این سرزمین فراگرفته‌ایم، [تمدن] بابل گرچه صاحب نوعی دانش بود، اما از اصول علمی عالی و قوانین ثابت طبیعی بی‌بهره بود. [تمدن] مصر هم با هندسه آشنا بود، اما به خلق [کتابی همچون] اصول (= کتاب هندسه اقلیدس) نائل نشد. درباره اندیشه حاکم بر مردم سامی عهد عتیق (= یهودیان) نیز باید بگوییم که ذاتاً ضد فلسفه و علم است. در کتاب ایوب جست‌وجوی علل [پدیده‌ها] در ردیف کفر قرار گرفته است و در حکمت یسوعی (l'Ecclésiaste) نیز علم بیهوده تلقی شده است. مؤلف این کتاب که پیش از بلوغ فکری سرخورده شده، مدعی است همه آن‌چه که زیر خورشید قرار گرفته

را مطالعه کرده و چیزی جز اندوه و نگرانی نیافته است ... اغلب اوقات از علم و فلسفه عرب (= اسلامی) بحث می‌کنیم. این علم و فلسفه چیزی جز ترجمه ناچیزی از علم و فلسفه یونان نیست.^۲

این‌گونه نگاه نژادپرستانه به علم شرقی نه تنها در آثار فلاسفه‌ای چون دکارت، کانت، آگوست کنت، هگل، مارکس، و هوسرل بلکه نزد مورخان علوم، چون پل تانری، الکساندر کویره، و مؤلفان آثار ریاضی بورباکی به‌خوبی مشهود است.

این فلاسفه و علمای اروپایی، که خواه‌ناخواه اصل موضوعه «علم اروپایی» را بنا نهادند و در ترویج آن کوشیدند، تکلیف علوم وارد شده از تمدن‌های دیگر، به‌ویژه از تمدن اسلامی، را در این علم مشخص نکردند. آنان فقط به تعریفی از علم و نظریه علمی پرداختند که در آن اجماع داشتند. با این حال، نظریه خوارزمی در پیدایش علم جبر، که همه ویژگی‌های علم به مفهوم امروزی را داشت و سرچشمه انقلاب عظیمی در ریاضیات شد، در نهایت از ذهن نه یک اروپایی، بلکه یک شرقی مسلمان تراوش کرده بود و این امر همه محاسبات و پیش‌داوری‌های نژادپرستانه را خدشه‌دار می‌کرد. از سوی دیگر، تأثیر جبر در اروپا و جهان علمی آن قدر چشم‌گیر و گسترده بود که انکار آن امکان نداشت. از این‌رو، بعضی از مورخان برجسته علم اروپا به‌عمد از بحث درباره تاریخ جبر چشم می‌پوشیدند و برخی دیگر مانند لئون روده (L. Rodet) نیز تلاش می‌کردند کار خوارزمی را مشابه کار علمای هند قلمداد کنند تا از ارزش آن بکاهند (Rodet, 1878) و از این‌روست که در بعضی از کتاب‌های تاریخ علم، که در اروپا نوشته شده است، نوعی تنگ‌نظری در قبال کار خوارزمی دیده می‌شود.

فقط در نیم قرن اخیر بود که بعضی از پژوهش‌گران بی‌طرف تاریخ علم توانستند حق مطلب را ادا کنند و، با توجه به ابداع علم جبر و گسترش آن توسط مسلمانان، ثابت کنند که علم نژاد و فرهنگ نمی‌شناسد و محصول ذهن خلاق انسان‌های متفکری است که در این عرصه تلاش می‌کنند.

در این مقاله، پس از بحث مختصری درباره ماهیت علم و نظریه علمی نشان خواهیم داد که نظریه خوارزمی درباره معادلات درجه دوم یک «نظریه علمی» است و نقش آن را در پیدایش نظریه معادلات درجه سوم نیز یادآوری خواهیم کرد.

۲. تعریف علم

درباره چیستی علم صاحب‌نظران نظریات متفاوتی ارائه کرده‌اند که کمابیش شبیه به

یکدیگرند.^۳ ما تعریف آلبرت اینشتین را بازگو می کنیم که نابغه علمی قرن بیستم معرفی شده است. اینشتین علم را چنین تعریف کرده است:

علم کوشش دیرینه ای است تا پدیده های محسوس این دنیا را، به وسیله اندیشه منظم، حدالمقدور به صورت جامعی دقیق و کامل درآوریم. به عبارت دیگر، علم تلاشی است برای بازسازی عالم هستی از طریق فرایند مفهوم پردازی (اینشتین، ۱۳۷۰: ۲۱).

از این گفته می توان علم را دانشی انعکاسی (réflexif) دانست. بدین معنی که چنین دانشی توانایی تبیین روش خود را نیز دارد. این روش می تواند مبتنی بر «استدلال قیاسی» و یا «مشاهدات تجربی» باشد.

پژوهش های تاریخی نشان می دهند که خاستگاه این علم یونان باستان بوده است (آقایانی چاوشی، ۱۳۸۰)؛ زیرا بررسی آماری (عددی) در مصر و بابل و تأیید الگوریتم ها در چین نمونه هایی از دانش های انعطاف پذیر^۴ در عهد باستان است. حال آن که در همین زمان در یونان، دانشمندان برای شناخت اشیای هندسی و روابط حاکم بر آنها روشی را ابداع کردند که امروزه از آن به «روش آکسیوماتیک» تعبیر می شود. همان روشی که اقلیدس هندسه خود را بر اساس آن بنا نهاده است. لازم به یادآوری است منظور از آکسیوماتیک روش دقیق علمی است که موضوع ناشناخته ای را با استفاده از قضایای شناخته شده و از طریق استقرای قیاسی حاصل کند (Blanché, 1965: 1).

بر این مبنا، هندسه اقلیدسی علمی است که گزاره های ویژه خود را دارد. این گزاره ها عبارتند از ۱. تعاریف، ۲. اصول متعارف یا آکسیوم ها، ۳. اصول موضوعه یا پوستولوها. مراد از تعریف گزاره ای است که مشخص می کند یک شیء چیست. اصول متعارف یا آکسیوم ها به حقایق کلی اطلاق می شود؛ از قبیل «کل بزرگتر از جزء است». چنین اصول متعارفی اثبات ناپذیرند.

اصول موضوعه یا پوستولوها حقایق مربوط به علم مخصوصی اند که حقیقت آنها چندان بدیهی نیست، لیکن باید آنها را بدون اثبات پذیرفت. برای مثال، اقلیدس در بین اصول موضوعه خود این گزاره را گنجانده است: «از هر دو نقطه می توان یک خط راست کشید».

با استفاده از این گزاره ها بود که اقلیدس قضایای بسیاری را در هندسه کشف کرد و راه را برای کشف قضایای دیگر با روش قیاسی هموار کرد. حال که با تعریف علم و به ویژه علم هندسه آشنا شدیم به سراغ تعریف یک نظریه علمی می رویم.

۳. تعریف نظریه علمی

نظریه علمی به مجموعه مفاهیم و گزاره‌هایی گفته می‌شود که ما را به بازآفرینی یا شناخت پدیده‌ای رهنمون کنند.

برخی از نظریه‌های وابسته به هم موجب پیدایش یک نظام یا علم می‌شوند. برای رسیدن به یک نظریه علمی در علوم طبیعی عموماً از «روش تجربی»، که به آن «استقرا» نیز می‌گویند، استفاده می‌شود. فرضیه‌ها توضیحاتی‌اند که پژوهش‌گران پس از مشاهدات دقیق خود در بخش خاصی از علوم و برای تفهیم آن‌ها ارائه می‌دهند. فرضیه‌ها درحقیقت حکم پیشنهادهایی را دارند که پژوهش‌گران برای توجیه یک پدیده ارائه می‌دهند.

پس از ارائه فرضیه‌ها، برای رد یا قبول آن‌ها آزمایش‌هایی انجام می‌شود و بر اساس فرضیه‌های باقی‌مانده پیش‌بینی‌هایی می‌شود و این عمل به همین نحو دنبال می‌شود تا محتمل‌ترین فرضیه انتخاب شود. این فرضیه، که از آزمون‌های تجربی گذشته است، سرانجام نام یک «نظریه علمی» را به خود می‌گیرد. نظریه علمی باید واجد شرایط زیر باشد:

۱.۳ جامعیت

نظریات علمی گرچه موضوع مشخصی دارند، حوزه مصداقی آن‌ها آن‌قدر گسترده است که ضرورتاً یک مورد خاص را شامل نمی‌شوند (جعفرنژاد، ۱۳۸۵: ۵۷).

۲.۳ انسجام منطقی

بین اجزای یک نظریه علمی باید انسجام منطقی برقرار باشد. به عبارت دیگر، در آن اصلی نباید اصل دیگر را نقض کند و نتایج تجربی یا مشاهداتی نباید با فرضیه‌های اولیه آن مغایرت داشته باشند.

۳.۳ شفافیت زبانی

فقط فرضیه‌هایی را می‌توان «نظریه علمی» نامید که علاوه بر شرایط مذکور در قالب زبانی منسجم و شفاف ارائه شوند (همان).

۴.۳ کسب اعتبار علمی

این شرط از اساسی ترین شروط یک «نظریه علمی» است؛ یک نظریه هنگامی علمی تلقی می شود که به وسیله یکی از علوم دقیقه شناخته شده مدلل شود. به تعبیر دیگر، اندیشه فردی هنگامی می تواند صورت نظریه به خود بگیرد که به فضای ذهن جمعی وارد شود. فضایی که در آن دانشمندان اندیشه را محک خواهند زد.

۵.۳ تعمیم پذیری

نظریه علمی در یک علم خاص باید تکیه گاهی برای ساختارهای متفاوت آن علم باشد و سؤالات جدیدی ایجاد کند یا در اثبات نظریه های کلی تر از خود به کار رود و در راستای پیش بینی موارد جدیدی کارساز باشد.

۴. خوارزمی و علم جبر

محمد بن موسی خوارزمی (درگذشته بعد از ۲۳۲ق) را پژوهش گران تاریخ علم به حق بنیادگذار علم جبر نامیده اند. این علم که از طریق کتاب وی، *المختصر فی حساب الجبر و المقابله*، در جهان اسلام شهرت یافت، ریاضی دانان پس از خود را به شدت تحت تأثیر قرار داد. این کتاب همچنین در قرون وسطای مسیحی از طریق ترجمه های لاتینی آن به اروپا راه یافت و جهان غرب را برای همیشه وامدار خود کرد.

دو واژه «جبر» و «الگوریتم»، که امروزه در ریاضیات همه ملل جهان راه یافته است، در واقع برگرفته از ترجمه لاتینی کتاب خوارزمی است. اولی از نام کتابش یعنی «الجبر» گرفته شده و لفظ دوم یعنی «الگوریتم» نیز برگرفته از شکل لاتینی «الخوارزمی» یعنی الگوریتمی است.^۳ در این نوشته، پس از ارائه شرح حال مختصری از خوارزمی، به بررسی ابتکار وی در پدید آوردن علم جبر می پردازیم.

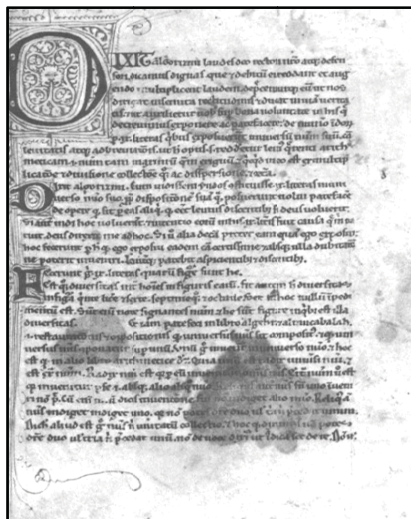
۱.۴ شرح حال خوارزمی

سال تولد خوارزمی نامعلوم است، ولی مورخان علم احتمال داده اند که در نیمه دوم قرن دوم هجری در خوارزم، که از شهرهای خراسان بزرگ آن زمان بود، به دنیا آمده است.

بغداد در آن زمان از مراکز علمی و فرهنگی جهان اسلام بود و دانشمندان را از هر نژاد و ملیتی به سوی خود جلب می‌کرد. همین امر قطعاً خوارزمی را به سفر به بغداد تشویق کرد. در بغداد به بیت‌الحکمه، که به دستور مأمون عباسی برای ترجمه و شرح آثار علمی و فلسفی تمدن‌های یونانی، هندی، بابلی، و ایرانی ساخته شده بود، دعوت شد و همراه تنی چند از ریاضی‌دانان برجسته آن زمان، همچون بنوموسی، به فعالیت علمی مشغول شد. در همین سال‌های فعالیت در بیت‌الحکمه بود که آثار ماندگار خود را چه در ریاضیات و چه در نجوم به رشته تحریر درآورد. خوارزمی در ۲۳۲ ق در بغداد درگذشت (قربانی، ۱۳۷۵: ۲۳۹).

۲.۴ آثار علمی خوارزمی

مهم‌ترین اثر خوارزمی در ریاضیات *المختصر من حساب الجبر و المقابله* است. رُژن در سال ۱۸۳۱ م این کتاب را از روی متن عربی نسخه خطی محفوظ در کتاب‌خانه آکسفورد به انگلیسی ترجمه کرد و همراه با متن عربی آن به چاپ رساند (Khwarizmi, 1831). متن عربی این کتاب را، بار دیگر در ۱۹۳۹، علی مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمد در مصر چاپ کردند (خوارزمی، ۱۹۳۹). رشدی راشد متن عربی جبر و مقابله را همراه با ترجمه فرانسوی آن در ۲۰۰۷ در پاریس به چاپ رساند (Rashed, 2007).



تصویر صفحه‌ای از ترجمه لاتینی کتاب حساب خوارزمی که در آن جمله *dixit algoritmi*. به معنای قال الخوارزمی، آمده است.

همین کتاب را، با چاپ راشد، نیکولا فارس به عربی ترجمه کرد و این ترجمه در ۲۰۱۰ در بیروت به چاپ رسید (راشد، ۲۰۱۰). حسین خدیو جم کتاب خوارزمی را از روی چاپ مصطفی مشرفه به فارسی ترجمه کرد و در تهران به چاپ رساند (خوارزمی، ۱۳۶۲). از جبر و مقابله دو ترجمه لاتینی قدیمی در دست است که مترجم یکی از آنها جرارد کرمونی است که در اوایل قرن دوازدهم میلادی زندگی می کرده است. مترجم لاتینی دیگر کتاب خوارزمی را برت چستری است که در ۱۱۴۵ آن را ترجمه کرده است. هوقس در ۱۹۸۶ متن منقح ترجمه کرمونی را چاپ کرده است (Hughes, 1986). کارپینسکی نیز ترجمه لاتینی چستری را با ترجمه انگلیسی آن همراه با یادداشت‌های مفیدی در ۱۹۱۵ به چاپ رساند (Khwarizmi, 1915).

۱.۲.۴ کتاب الجمع و التفریق

این کتاب، که تحت تأثیر ریاضیات هندی نوشته شده، نخستین بار حساب هندی را در کشورهای اسلامی نشر و گسترش داده است. متن عربی این کتاب در دست نیست، ولی از آن ترجمه لاتینی قدیمی در کتابخانه کیمبریج نگهداری می شود. این ترجمه لاتینی را بن کمپانی به چاپ رسانده است (قربانی، ۱۳۷۵).

۲.۲.۴ زیج

این اثر نجومی خوارزمی نیز تحت تأثیر نجوم هندی نوشته شده و ریاضی دانان اسلامی بعد از خویش را به سهم خود با این نجوم آشنا کرده است. از این اثر ترجمه‌ای به انگلیسی در دست است (Neugebauer, 1962).

۵. خوارزمی نظریه پرداز معادلات درجه دوم

خوارزمی از این جهت در تاریخ علم اهمیت دارد که مبتکر دانشی است که خود آن را علم «جبر و مقابله» نامیده است. جبر در نگاه خوارزمی همان نظریه علمی معادلات درجه اول و مخصوصاً درجه دوم است؛ یعنی خوارزمی نخستین کسی است که نظریه‌ای علمی را برای حل معادلات درجه دوم ارائه کرده است.

البته مراد از نظریه علمی حل یک معادله درجه دوم برای اولین بار نیست؛ چرا که بابلیان و هندیان، قرن‌ها پیش از خوارزمی، دستوراتی برای حل بعضی از معادلات درجه دوم ارائه

کرده بودند (Rodet, 1878). روشن است که چنین دستوراتی را که این محاسبه‌گران عهد باستان برای حل مسائل روزمره خود، از قبیل تقسیم زمین، به کار می‌بردند، نمی‌توان یک نظریه علمی نامید. آنان نیز نمی‌خواستند یک نظریه علمی ارائه دهند، بلکه هدف اصلی آن‌ها صرفاً رفع بعضی از نیازها و مشکلات زندگی بود که به معادلات درجه دوم در حالات خاصی منجر می‌شد.

احتمال می‌رود که خوارزمی با این دستورات آشنا بوده است. بعضی از مورخان تاریخ علم، مانند انبویا، کوشیده‌اند تا برای کار خوارزمی منابعی بابلی بیابند (Anboub, 1978: 75). اگر هم ثابت شود که خوارزمی از این منابع بهره برده است، چیزی از ارزش کارش نمی‌کاهد؛ زیرا خوارزمی اگر از منابع هندی و بابلی بهره برده است، به منابع یونانی نیز متکی بوده است. در مجموع، کار خوارزمی تلفیق موفق‌تری از کارهای بابلیان، هندیان، و یونانیان بوده است؛ زیرا او با این کار خود به ارائه نظریه‌ای پرداخت که در منابع هیچ‌یک از این تمدن‌ها وجود نداشت. بنا به گفته اونگورو از مورخان علوم ریاضی «محاسبات بابلی و یونانی غیر جبری هستند. همین قادر نبودن به تشریح روابط و حل مراحل است که مانع این می‌شود که ریاضی‌دان بابلی واجد شرایط جبردانی باشد ... چیزی که او قادر است به وجود بیاورد دستور العمل است» (Unguru, 1979: 561) به نقل از الهه خیراندیش، ۱۳۶۸: ۲۲۰). حال که تفاوت کار خوارزمی با کار اسلاف وی را روشن کردیم به ارائه نظریه‌اش در علم جبر می‌پردازیم. این نظریه را در سه ویژگی می‌توان خلاصه کرد که در ادامه هر یک را توضیح خواهیم داد.

۱.۵ ارائه صورت کلی تمام معادلات درجه دوم

پیش‌تر گفتیم که یک نظریه هنگامی «علمی» نامیده می‌شود که پدیده‌ای را در حالت کلی بررسی کند. به همین علت است که خوارزمی نخست صورت کلی تمام معادلات درجه دوم شناخته‌شده در عصر خود را بیان می‌کند که با علائم امروزی عبارتند از:

- (1) $ax^2 = bx$
- (2) $ax^2 = c$
- (3) $ax^2 + bx = c$
- (4) $ax^2 = bx + c$
- (5) $ax^2 + c = bx$

که در آن a ، b ، و c همگی اعداد صحیح و مثبت اند. البته این معادلات را امروزه می توان به شکل زیر نمایش داد:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

که در آن ضرایب A ، B ، و C اعداد حقیقی اند.

۲.۵ ارائه الگوریتم برای حل هریک از این معادلات

خوارزمی، پس از مطرح کردن صورت کلی معادلات درجه دوم شناخته شده در عصر خود، دستور حل هریک از آنها را نیز ارائه می دهد. این دستورات را از این پس «الگوریتم» می نامیم.

۳.۵ اثبات هندسی هریک از این الگوریتم ها

خوارزمی پس از ارائه الگوریتم، برای حل معادلات درجه دوم، به اثبات هندسی هریک از این الگوریتم ها می پردازد تا بتواند نظریه علمی خود را با علم هندسه، یعنی علمی که دقیق و دارای شهود واقعی است، مبرهن سازد و به پشتوانه این اثبات هندسی جبر را به یک علم جهانی و مستدل تبدیل کند. این همان نظریه علمی خوارزمی درباره معادلات درجه دوم است که متأسفانه اغلب محققان تاریخ علم، چه ایرانی و چه غیر ایرانی، از شناخت آن عاجز بوده اند.

البته خوارزمی پس از مطرح کردن نظریه علمی خود درباره معادلات درجه دوم این معادلات را در هریک از حالات خاص مطالعه می کند و ما برای درک بهتر نظریه او ناگزیریم یکی از این حالات خاص را بررسی کنیم، اما این بررسی بدون آگاهی از معانی دو واژه «جبر» و «مقابل» ممکن نیست.

جبر و مقابل برای خوارزمی گویای دو عملیات است؛ جبر یعنی شکسته بندی، در قدیم در ممالک اسلامی هرگاه دست یا پای کسی شکسته می شد برای معالجه پیش شکسته بندی که او را «المُجَبَّر» می نامیدند می رفت. این شخص نیز عضو شکسته را معمولاً برای مدتی به چوبی می بست. هنوز هم در مصر شکسته بند را با نام «المُجَبَّر» می شناسند. حضرت امیر (ع) در دعای «جوشن کبیر» خدا را «جابر العظم الکسیر» به معنای «پیونددهنده استخوان های شکسته» نامیده است.

اما در زبان خوارزمی «جبر» به این مفهوم است که باید عضو شکسته معادله را به هم پیوند داد. این عضو شکسته همان است که دارای علامت منفی است و بنابراین باید کاری کرد که این علامت را به مثبت تبدیل کرد؛ یعنی جمله دارای علامت منفی را به طرف دیگر معادله انتقال داد.

اگر فرضاً معادله‌ای به صورت $x^2 - 10x + 50 = 29$ داشته باشیم، با انتقال $-10x$ به طرف راست معادله عمل «جبر» را انجام داده‌ایم و معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

$$x^2 + 50 = 10x + 29$$

اما «مقابل» یعنی از دو طرف معادله مقادیر یکسانی را کم کنیم. در مثال فوق، از دو طرف، مقدار ۲۹ را کم می‌کنیم و با این کار، یعنی مقابل، معادله به شکل نهایی خود یعنی:

$$x^2 + 21 = 10x$$

درمی‌آید که خوارزمی نه به شکل یک فرمول ریاضی، بلکه آن را به صورت کلمات مطرح می‌کند و می‌گوید که مال یعنی x^2 به اضافه ۲۱ مساوی ۱۰ جذر یعنی $10x$ است. دستورالعمل یا الگوریتمی که خوارزمی برای حل این معادله ارائه می‌دهد شباهت به همان الگوریتم‌هایی دارد که امروزه در علوم مربوط به انفورماتیک از آن‌ها استفاده می‌شود. دستورالعمل خوارزمی برای حل این معادله از قرار زیر است:

جذر را نصف می‌کنی می‌شود پنج جذر. این پنج جذر را در خودش ضرب می‌کنی می‌شود بیست و پنج جذر. پس عدد بیست و یک را که گفتیم همراه مال است از آن کم می‌کنی، چهار باقی می‌ماند. جذر چهار را می‌گیری که دو می‌شود. این عدد را از نصف جذرها که عبارت است از پنج کم می‌کنی که عدد سه باقی می‌ماند و این عدد جذر مالی است که می‌خواستی و خود مال نه است و اگر بخواهی، می‌توانی این جذر را بر نصف آن جذرها بیفزایی. در نتیجه، هفت می‌شود و این عدد جذر مالی است که تو می‌خواهی و خود مال چهل و نه خواهد بود (خوارزمی، ۱۳۶۲: ۴۵-۴۶).

این الگوریتم خوارزمی را می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد:

$$10x \div 2 = 5x \quad \text{مرحله ۱}$$

$$5 \times 5 = 25 \quad \text{مرحله ۲}$$

$$25 - 21 = 4 \quad \text{مرحله ۳}$$

مرحله ۴

$$\sqrt{4} = +2$$

خوارزمی همانند دیگر ریاضی دانان اسلامی عدد منفی را نمی شناخته است، بنابراین فقط +2 را به عنوان ریشه مثبت چهار در نظر می گیرد.

$$5 + 2 = 7$$

جواب معادله فوق عبارت است از

البته خوارزمی همانند محاسبه گران بابلی نمی گوید که چگونه به این جواب رسیده است. امروزه می دانیم که این دستورالعمل حاصل عملیات زیر است:

$$x^2 + 21 = 10x$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

اگر به طرفین این معادله ۴ را اضافه کنیم خواهیم داشت:

$$(x - 5)^2 = 4 \rightarrow \begin{matrix} x - 5 = 2 \\ x = 7 \end{matrix}$$

دیدیم که خوارزمی معادله خود را فقط با ارائه یک دستورالعمل یا الگوریتم حل کرد و در واقع تا این جا کار خوارزمی مشابه کار محاسبه گران بابلی است. فقط در اثبات هندسی این دستور است که خوارزمی از این محاسبه گران فراتر می رود؛ یعنی این دستور خود را با استدلالی هندسی ثابت می کند.

چرا اثبات هندسی؟ زیرا هندسه در یونان باستان به علت دقت و شهود آن مهم ترین قسمت ریاضیات محسوب می شد. مثلاً ابن یونس موصلی در قرن هفتم هجری، در شرحی که بر کتاب اعمال/الهندسه ابوالوفای بوزجانی نوشته است، هندسه را روح علوم دیگر نامیده است.^۶

برهان هندسی خوارزمی چنین است:

مستطیل ABCD را به اضلاع AB=x و BC=10 را مطابق شکل رسم می کنیم. مساحت این مستطیل برابر است با 10x.

از طرفی این مقدار بنا به فرض معادله برابر است با $x^2 + 21$

روی ضلع BC نقطه E را چنان در نظر می گیریم که BE=BF باشد. مربع ABEF را رسم می کنیم. واضح است که مساحت مستطیل CDEF برابر با ۲۱ واحد سطح است.

حال فرض می‌کنیم H وسط BC باشد. ضلع CD را تا نقطه N امتداد می‌دهیم به طوری که $CN=CH=5$ باشد و سپس مربع CNMH را تکمیل می‌کنیم. مساحت این مستطیل مساوی با ۲۵ واحد سطح خواهد شد. از نقطه I وسط AD نقطه S را روی AD مشخص می‌کنیم به طوری که $IS = IF = 5 - x$ باشد.

مربع MISW را با مساحت $(5-x)^2$ تکمیل می‌کنیم.

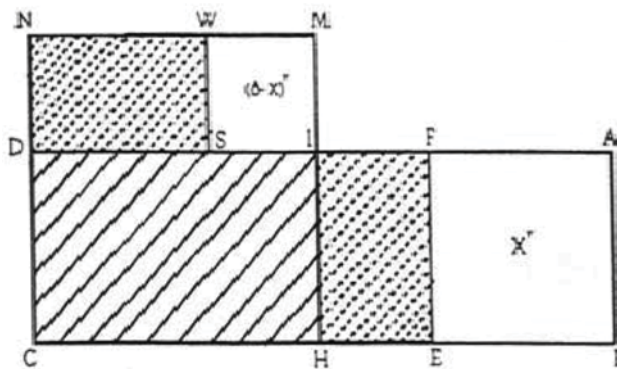
از آنجایی که DS برابر با مقدار مجهول یعنی x است، مساحت مستطیل DSWN برابر خواهد بود با $x(5-x) = S_{ITEH}$

بنابراین مساحت مربع CHMN برابر است با مساحت مستطیل CDEF به اضافه مساحت مربع WSIM

یعنی:

$$21 + (5-x)^2 = 25 \Rightarrow (5-x)^2 = 4$$

$$x = 7$$



شکل ۱

۶. چگونگی تدوین نظریه خوارزمی

خوارزمی از چگونگی پیدایش روش خود برای نیل به نظریه‌اش چیزی نمی‌گوید، اما امروزه با آگاهی از روشی که در بخش ۴ شرح دادیم می‌توانیم روش او را حدس بزنیم و آن را به صورت زیر شرح دهیم.

برای این منظور معادله $x^2 + 10x = 39$ را در نظر می‌گیریم که در جبر و مقابله وی درج شده است. می‌دانیم که هرگاه اندازه عددی یک مربع را داشته باشیم، پیدا کردن ضلع

این مربع کار مشکلی نیست؛ کافی است جذر آن را بگیریم. مثلاً معادله $x^2 = 81$ را می‌توانیم در ذهن حل کنیم و عدد 9 را برای جواب آن تعیین کنیم. بنابراین، هنگامی که در یک طرف معادله مربع کاملی داشته باشیم، با جذرگرفتن طرفین این معادله می‌توانیم به جواب برسیم.

اما وقتی که به معادله $x^2 + 10x = 39$ برخورد می‌کنیم، درحقیقت با معمایی مواجه می‌شویم که دانش قبلی ما نمی‌تواند ما را یاری دهد؛ چه عددی است که مجذور آن به اضافه حاصل‌ضربش در 10، برابر با 39 است؟

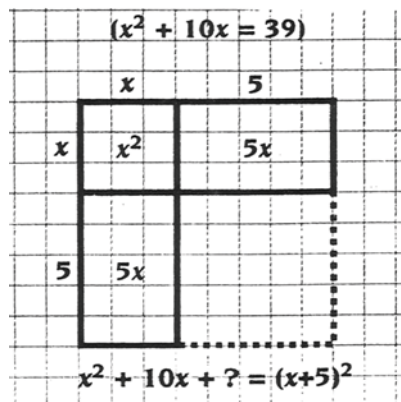
می‌خواهیم بدانیم خوارزمی در این باره چه می‌گوید.

اولاً، او فقط مربع واقعی یا مربع کامل را می‌شناسد. بنابراین، تلاش می‌کند که معادله را به صورتی درآورد که یک طرف آن مربع کامل باشد. برای این منظور، گام به گام از شهود هندسی بهره‌برداری می‌کند.

فرضیه ۱. او احتمالاً مربعی رسم می‌کند که ضلعش برابر با x است. بدین ترتیب x^2 تجسم عینی به خود می‌گیرد. از آنجایی که یک سطح را فقط می‌توان با یک سطح جمع کرد، $10x$ نیز برای او سطح یک مستطیل را تجسم می‌کند، اما چسبانیدن این سطح به x^2 چیزی حاصل نمی‌دهد و این به مثابه آن است که از x در $x^2 + 10x$ فاکتور بگیریم که معادله به این شکل درمی‌آید: $x(x + 10) = 39$

بنابراین باید راه دیگری در پیش گرفت.

فرضیه ۲. خوارزمی برای رهایی از این بن‌بست در دومین گام باید مستطیل به مساحت $10x$ را به دو مستطیل به مساحت $5x$ برش دهد و آن‌ها را مطابق شکل زیر کنار مربع x^2 گذارد.



شکل ۲

همان‌طور که دیده می‌شود، ما با یک مربع ناقص مواجهیم که اندازه مساحت آن یعنی $(x + 5)^2$ را می‌دانیم. بنابراین با کامل کردن این مربع، یعنی افزودن ۲۵ واحد سطح به معادله مورد نظر خود، به شکل زیر می‌رسیم:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \rightarrow (x + 5)^2 = 64$$

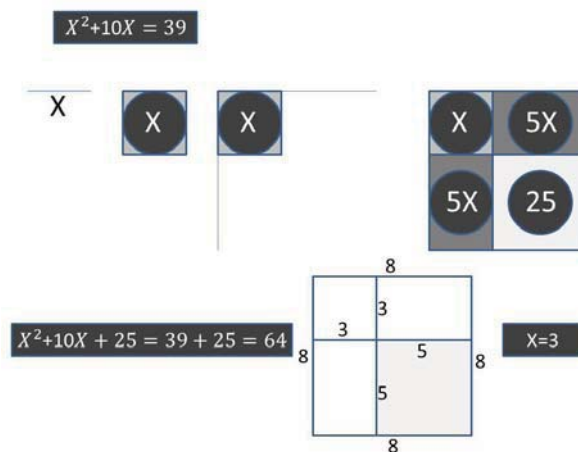
در این جا است که خوارزمی به مقصود اصلی خود نایل می‌شود.

اکنون در گام آخر باید از طرفین این معادله جذر گرفت و خواهیم داشت:

$$x + 5 = 8 \rightarrow x = 3$$

حال که خوارزمی جواب معادله مفروض را با استفاده از شهود هندسی به دست آورده است می‌تواند دستور یا الگوریتم لازم برای رسیدن به این جواب را به شرح زیر بیان کند:

یک مال و ۱۰ جذر با ۳۹ برابر است. راه حل آن چنین است: ابتدا مقدار جذرها را که ۱۰ است نصف می‌کنی، ۵ می‌شود، آن نصف را در خودش ضرب می‌کنی، حاصل ۲۵ خواهد بود، سپس عدد ۳۹ را بر آن می‌افزایی، مجموعاً ۶۴ می‌شود، جذر این عدد را می‌گیری، ۸ می‌شود، سپس نصف جذرها، یعنی ۵ را از آن کم می‌کنی، حاصل یعنی سه مقدار «جذر مال» مورد نظر است و آن مال ۹ است (همان: ۴۳).



شکل ۳

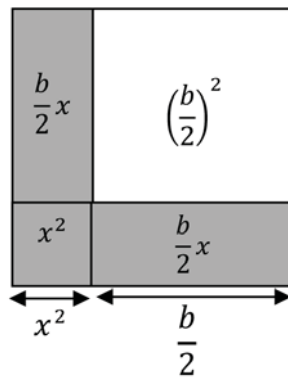
۱.۶ تعمیم مسئله برای ضرایب دل‌خواه

خوارزمی، برای این که از این روش یک دستور کلی استخراج کند، شکل کلی معادله را با ضرایب دل خواه در نظر می گیرد که ما با استفاده از علائم جدید به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$x^2 + bx = c$$

وی این معادله را به روش قبلی حل می کند:

مربعی به ضلع x را تجسم عینی می دهد. مستطیلی به طول و عرض b و x را می سازد و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند، به طوری که طول آن ها $\frac{b}{2}$ و عرضشان x باشد. آن ها را مطابق شکل زیر کنار مربع قرار می دهد. شکل حاصل یک مربع ناقص است که برای کامل کردن آن باید مربعی به ضلع $\frac{b}{2}$ در جای خالی قرار داده شود.



شکل ۴

پس از افزودن این مقدار به طرفین معادله و جذرگیری از طرفین خواهیم داشت:

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

۷. تعمیم پذیری نظریه خوارزمی

گفتیم که یکی از ویژگی های نظریه علمی تعمیم پذیری آن است. این ویژگی را در نظریه خوارزمی نیز مشاهده می کنیم. پیش از بررسی این مطلب باید اشاره کنیم که جبر و مقابله،

پس از ترجمه‌های لاتین آن، مورد توجه ریاضی‌دانان اروپایی قرار گرفت که معروف‌ترین آن‌ها لئوناردو پیزایی، معروف به فیوناچی، بود (Samplonius, 1987: 83).

در قرن شانزدهم میلادی، دو ریاضی‌دان برجسته ایتالیایی به نام‌های تارتاگلیا (Tartaglia) و کاردان (Cardan) مستقیم یا با واسطه و از طریق کتاب فیوناچی با اثر خواری می آشنا شدند و توانستند راه حل جبری معادله درجه سوم را به کمک رادیکال‌ها ارائه کنند. در این کار نقش تارتاگلیا بسیار ارزنده است.

این ریاضی‌دان برای حل معادله درجه سوم به صورت زیر

$$x^3 + px = q \quad (1)$$

از همان روش هندسی خواری می برای حل معادله درجه دوم، که ما در بخش پیشین از آن بحث کردیم، بهره برد.

در زیر به ارائه روش تارتاگلیا می‌پردازیم:

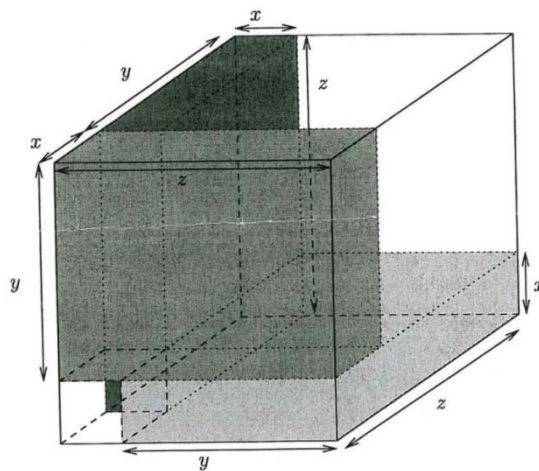
معادله (۱) برای این ریاضی‌دان ایتالیایی و معاصرانش نخستین بار به صورت یک معما مطرح شد؛ چه عددی است که مکعب آن با حاصل ضربش در یک عدد برابر با عددی مفروض است.

تارتاگلیا تا آن زمان فقط مکعب واقعی یا مکعب کامل را می‌شناخت و بنابراین باید تلاش کند که این معادله یا معما را به صورتی درآورد که یک طرف آن مکعب کامل باشد و از کعب گرفتن از آن به جواب مسئله برسد.

قبلاً اشاره کردیم که جبر و مقابله، که به لاتینی ترجمه شده بود، برای همه ریاضی‌دانان اروپایی و به‌ویژه تارتاگلیا شناخته شده و منبع الهام بود. از این‌رو، تارتاگلیا همان روش هندسی یا شهودی را، که خواری می برای حل معادلات درجه دوم به صورت $x^2 + bx = c$ دنبال کرده بود، برای حل معادله (۱) به کار برد.

یعنی در گام اول مکعبی را رسم می‌کند که ضلع آن برابر x است و بدین ترتیب x^3 تجسم عینی می‌گیرد. از آنجایی که یک جسم سه‌بعدی را باید با یک جسم سه‌بعدی جمع کرد، bx نیز برای او حکم یک مکعب مستطیلی را دارد که ارتفاع آن برابر با ضلع مکعب تجسم یافته است.

این مکعب مستطیل را می توانیم با ابعاد x, y, z و با ضریب دل خواه n نشان دهیم که n می تواند هر عدد دل خواهی را به خود بگیرد. بدون این که از کلیت مسئله بکاهیم n را برابر با ۳ در نظر می گیریم. حال می توانیم مکعب مستطیل $3xyz$ را به محاذات مکعب x^3 قرار دهیم، اما چسباندن این مکعب مستطیل به مکعب x^3 چیزی نتیجه نمی دهد. تارتاگلیا، برای رهایی از این بن بست، در دومین گام مکعب مستطیل $3xyz$ را به سه مکعب مستطیل متساوی تقسیم می کند و مطابق شکل کنار مکعب x^3 قرار می دهد.



شکل ۵

همان گونه که ملاحظه می شود از این مجموع یک مکعب ناقص حاصل می شود که اندازه حجم آن z^3 را می دانیم، بنابراین برای رسیدن به این مکعب باید به طرفین معادله (۱) مکعب به حجم y^3 را اضافه کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$z^3 = y^3 + (x^3 + 3xyz)$$

اما فرض کرده بودیم: $3yz = p$

از طرف دیگر حجم مکعب بزرگ برابر است با $q + y^3$ که از آن رابطه زیر حاصل می شود:

$$q + y^3 = z^3$$

سؤالی که اکنون مطرح می شود این است که آیا می شود دستگاه زیر را حل کرد.

$$\begin{cases} yz = \frac{p}{3} \\ z^3 = q + y^3 \end{cases}$$

از آن جا که این دستگاه معادل دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} yz = \frac{p}{3} \\ z^6 - qz^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3, \end{cases}$$

کافی است که یک معادله درجه دومی را برای یافتن z^3 حل کنیم و بعد ریشه سوم آن را برای یافتن z تعیین کنیم.

بنابراین معادله درجه دومی که z^3 یک ریشه آن است به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(z^3 - \frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

این معادله یک ریشه مثبت به صورت زیر دارد:

$$z^3 = \frac{q}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

و سرانجام خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x = z - y = z - \frac{p}{3z} \\ = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3 \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \end{aligned}$$

هرگاه صورت و منخرج عبارت طرف راست را در مقدار زیر ضرب کنیم:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

با توجه به این که

$$\frac{q}{2} < \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

به فرمول زیر می‌رسیم که پاسخ معادله (۱) است:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

این همان فرمولی است که تارتاگلیا به دست آورد، ولی کاردان آن را منتشر کرد. این گونه بود که روش خوارزمی برای حل معادله درجه سوم (۱) راه گشا شد.

مشابه چنین روشی را کاردان، ریاضی دان هم عصر با تارتاگلیا، در کتابش برای حل معادله $x^3 + 6x = 20$ به کار برده است. او برای این کار نخست مکعبی به ضلع x را می‌سازد، آن‌گاه $6x$ را تبدیل به سه مکعب مستطیل می‌کند که یکی از ابعادش مساوی x است. سپس آن‌ها را طوری کنار مکعب x^3 قرار می‌دهد که یک مکعب ناقص پدید آید. در این جا، کاردان از خوانندگان خود می‌خواهد «مکعب را به همان طریقی که عرب‌ها (دانشمندان اسلامی) و یا لئوناردو فیبوناچی مربع را [برای حل معادلات درجه دوم] کامل می‌کند کامل کنند»^۹.

این مطلب می‌رساند که کاردان و تارتاگلیا مستقیم یا از طریق فیبوناچی با اثر جبری خوارزمی آشنا بوده‌اند.

۸. نتیجه گیری

خوارزمی ریاضی دان نابغه ایرانی، که از یک سو وارث ریاضیات یونانی و از سوی دیگر آشنا با دستورات یا الگوریتم‌های مردم بابل در حل برخی از معادلات درجه دوم بود، از

تلفیق این دانش‌ها برای نخستین بار علمی را به وجود آورد که پیش از وی در هیچ‌یک از تمدن‌های قدیمی سابقه نداشت. این علم همان است که امروزه علم جبر خوانده می‌شود و یکی از شاخه‌های علوم ریاضی به‌شمار می‌رود. این علم را که به طور خلاصه می‌توانیم نظریه معادلات درجه دوم بنامیم، دارای همان ساختاری است که از یک نظریه کاملاً علمی انتظار می‌رود. یعنی نه تنها دستور حل همه معادلات درجه دوم را ارائه می‌دهد، بلکه اثبات هندسی این دستورات را نیز می‌آورد. این نظریه از طریق ترجمه‌های لاتینی کتابش در قرون وسطی وارد اروپا شد و انقلابی در علوم ریاضی به پا کرد.

نظریه خوارزمی، که منشأ شرقی داشت و از ذهن یک ایرانی مسلمان برخاسته بود، پیش‌دآوری‌های بعضی از فلاسفه و دانشمندان نژادپرست اروپایی را، که علوم دقیقه را به طور کلی «علوم اروپایی» می‌نامیدند و از این پندار ناصواب «اصل موضوعی» را برای تحقیر و استثمار دیگر کشورها ساخته بودند، باطل کرد و این حقیقت را می‌رساند که علم نژاد و قبیله نمی‌شناسد و متعلق به همه انسان‌هایی است که در کشف رازهای جهان کوشیده‌اند.

پی‌نوشت

۱. رشدی راشد نظر پل تانری (P. Tannery) از دانشمندان نژادپرست فرانسوی درباره علوم اسلامی را چنین آورده است:

The distinctive mark of Western science, in its Greek origins as well as in its modern renaissance, is its conformity to rigorous standards; in contrast, Oriental science in general, and Arabic science in particular, lets itself be carried away by empirical rules and methods of calculation, neglecting to verify the soundness of each step on its path. The case of Diophante illustrates this idea perfectly: as a mathematician, ...

۲. عین نوشته رنان چنین است:

Dans la science et la philosophie, nous sommes exclusivement Grecs. Larecherche des causes, savoir pour savoir, est une chose dont il n'y a nulle trace avant la Grèce, une chose que nous avons apprise d'elle seule. Babylone a eu une science, mais elle n'a pas eu le principe scientifique par excellence, la fixité absolue des lois de la nature.

L'Égypte a su de n'a pas créé les Éléments d'Euclide. Quant au vieil esprit sémitique, il est de sa nature anti philosophique et anti-scientifique. Dans Job, la recherche des

causes est presque présentée comme une impiété. Dans l'Écclésiaste, la science est déclarée une vanité. L'auteur, prématurément dégoûté, se vante d'avoir étudié tout ce qui est sous le soleil et de n'y avoir trouvé que de l'ennui.

On parle souvent d'une science et d'une philosophie arabes, et, en effet,

pendant un siècle ou deux, au moyen âge, les Arabes furent bien nos maîtres ;mais c'était en attendant que nous connussions les originaux grecs. Cette science et cette philosophie arabes n'étaient qu'une mesquine traduction de la science et de la philosophie grecques (Kouloughli, 2007).

برای آگاهی بیش تر از دیدگاه رنان درباره علم اسلامی ← (Renan, 1883: 11).

۳. برای مثال ← (چالمرز، ۱۳۷۸: ۱۴) و (کاپالدی، ۱۳۸۷: ۳۲-۳۳).

۴. اصطلاح علوم انعطاف پذیر را پروفیسور برنارد ویتراک (B. Vitrac) برای دانش‌هایی که مبتنی بر تجارب شخصی‌اند و پشتوانه استدلالی ندارند به کار برده است (Aghayani Chavoshi, 2006: 108).

۵. جمله اول ترجمه لاتینی کتاب حساب خوارزمی این است: «Dixit algotitmi» که ترجمه «قال الخوارزمی» است.

۶. عین نوشته ابن یونس چنین است: «علم الهندسة الذى هو اصل العلوم الحقيقية و اس بل مادة لها و اسطقس اذ نسبهته الى ساير العلوم الحقيقية نسبت الواحد الى العدد بل نسبة الروح الى الجسد» (نسخه خطی شماره ۵۳۵۷، کتابخانه آستان قدس، صفحه ۱).

۷. در ارائه روش تارتاگلیا برای حل معادله درجه سوم از (Boopp, 2006) استفاده شده است.

۸. این مطلب کاردان را پارشال، یکی از مورخان ریاضی، در مقاله‌ای با عنوان «هنر جبر از خوارزمی تا ویث» آورده است. عین نوشته پارشال چنین است:

Here, Cardano asked his readers to complete the cubes formed on $AB + BC$, in just the same way the Arabs or Leonardo completed the square (Parshall, 1988: 160)

منابع

- آقایانی چاوشی، ج. (۱۳۸۰). «پیدایش علم به مفهوم امروزی آن (معجزه یونان)»، آینه میراث، س ۴، ش ۳. اینشتین، آلبرت (۱۳۷۰). حاصل عمر، ترجمه ناصر موفقیان، تهران: علمی و فرهنگی.
- جعفرنژاد، علی (۱۳۸۵). «نظریه چیست؟ شش ویژگی برای نظریه»، خردنامه همشهری، ش ۷.

- چالمرز، آلن اف. (۱۳۷۸). چپستی علم، درآمدی بر مکاتب علم‌شناسی فلسفی، ترجمه سعید زیباکلام، تهران: سمت.
- خوارزمی (۱۹۳۹). کتاب الجبر و المقابله، تحقیق و تعلیق علی مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمد، القاہرہ.
- خوارزمی (۱۳۶۲). جبر و مقابله، ترجمه حسین خدیوچم، تهران: خوارزمی.
- خیراندیش، الهه (۱۳۶۸). «مفهوم جبر در تاریخ جبر»، نشر ریاضی، س ۲، ش ۳.
- راشد، رشدی (۲۰۱۰). ریاضیات خوارزمی تأسیس علم الجبر، ترجمه د. نقولا فارس، بیروت: مرکز دراسات الوحدة العربیة.
- قربانی، ابوالقاسم (۱۳۷۵). زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم هجری، تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
- کاپالدی، نیکلاس (۱۳۸۷). فلسفه علم، تکامل تاریخی مفاهیم علم و پیامدهای فلسفی آن‌ها، ترجمه علی حقی، تهران: سروش.
- Aghayani Chavoshi, J. (2006). 'L'histoire des Mathématiques Grecques d'après Bernard Vitrac', *Ayene-ye Miras New Series*, Vol. 4, No. 35, History of Science.
- Anboub, A. (1978). 'L'Algèbre Arabe aux LX^{ème} et X^{ème} Siècles, Aperçu général', *Journal for the History of Arabic Science*, Vol. 2, No.1.
- Blanché, R. (1965). *L'axiomatique*, Paris: PUF.
- Boopp, N. (2008). 'La Méthode de Tartagtia, Comment Utiliser Les Volumes Pour Résoudre une équation du', *3^e degré L'ouvert*, No. 116.
- Hughes, Barnabas B. (1986). *Robert of Chesters Latin Translation of al-Khwarizmi's al-Jabr, A New Critical Edition*, Barnabas Bernard Hughes (ed.), Stuttgart: Steiner Verlag Wiesbaden.
- Khwarizmi (1831). *The Algebra of Mohammed ben Musa*, Edited and translated by Frederic Rosen, Londer.
- Khwarizmi (1915). *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, With an Introduction, Critical Notes and an English Version by Louis Charles Karpinski, New York: Macmillan; London: Macmillan and Company Limited.
- Kouloughli, D. (2007). 'Ernest Renan, Un Anti Sémitisme Savant', *Histoire Epistémologie Langage*, Vol. 29, No. 2.
- Neugebauer, Otto (1962). *The Astronomical Tables of al-Khwārizmī*, trans. Commentaries of the Latin Version, H. Suter (ed.), Copenhagen: Herausgegeben und Kommentiert. (Supplemented by Corpus Christi College MS 283).
- Parshall .H. K. (1988). 'The Art of Algebra from al-Khwarizmi to viète, A Study in the Natural Selection of Ideas', *History of Science*, Vol. 26, No. 72.
- Rashed, R. (2007). *Al-Khwarizmi Le Commencement de L' Algèbre*, Texte établi traduit et Commenté par R. Rashed, Paris: Librairie Blanchard.
- Renan, E. (1883). *L'islamisme et la Science*, Conférence Faite à la Sorbonne le 29 mars 1883, Paris: Calmann Lévy.

- Rodet, Léon (1878). 'L'Algèbre d'al- Khwarizmi et les Methods Indienne et Grecque', *Journal Asiatique*, Série 7,11.
- Samplonius, Y. D. (1987). 'Developments in the Solution to the Equation $cx^2 + bx = a$ from al-Khwarizmi to Fibonacci', *From Deferent to Equant, A Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E. S. Kennedy*, David A. King and Georg Saliba (eds.), (Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 500, New York 1987).
- Unguru, S. (1979). 'Critiques and Contentions-History of Ancient Mathematics, Some Reflections on the State of the Art', *Isis*, Vol. 70.