

نقش قواعد مثلثاتی در عناصر معماری ایران از دیدگاه غیاث‌الدین جمشید کاشانی

فاطمه فلاحی*

سعید میر ریاحی**، حسین سلطان زاده***، محمد مهدی رئیس سمیعی****

چکیده

کاربرد قواعد محاسباتی سهم عمده‌ای در هماهنگی نسبت‌ها و عناصر معماری دارد. علم هندسه و کاربرد آن یکی از اصلی‌ترین ویژگی‌های معماری ایران است و توسعه آن در معماری ایران از سده‌های هشتم و نهم آغاز شد و تا قرن دهم ادامه یافت. آنچه که از حیث مطالعات مثلثاتی عناصر معماری ایران در عصر تیموری مد نظر می‌باشد بهره‌گیری از دیدگاه ریاضی‌دان و اندیشمند قرن نهم، غیاث‌الدین جمشید کاشانی^۱، در اندازه‌گیری، محاسبات و قاعده‌مند کردن این عناصر است. یکی از دستاوردهای غیاث‌الدین تثلیث زاویه و دایره است که تکمیل‌کننده مثلثات و مقاطع مخروطی خیام می‌باشد. هدف این پژوهش پاسخ به این پرسش است که: آیا محاسبات و ایده‌های ریاضی‌دان ناموری چون کاشانی قابلیت به کار گرفته شدن در صنعت معماری را دارد؟ مبانی نظری پژوهش حاضر

* دانشجوی دکتری تخصصی معماری، گروه معماری، دانشکده معماری و شهرسازی، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران (نویسنده مسئول)، mehraz.ir@gmail.com

** دانشیار گروه معماری، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران، saiid.mirriahi@gmail.com

*** دانشیار، گروه معماری، دانشکده معماری و شهرسازی، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران، h72soltanzadeh@gmail.com

**** استادیار، گروه معماری، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه گیلان، گیلان، ایران، r_samiei@guilan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۱۵، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۲

به دنبال پاسخ این سوال است که: آیا بین مباحث نظری و عملی هندسه و معماری ارتباط وجود دارد؟

در این پژوهش، بر اساس نسخ به‌جا مانده از ریاضی‌دانان ایرانی، ریشه قواعد محاسباتی و ترسیمی برخی از عناصر معماری که از نظر پژوهشگر با قضیه منلائوس مرتبط است، توسط زبان برنامه‌نویسی پایتون در نرم‌افزار راینو ارزیابی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که محاسبات و ترسیمات کاشانی فقط تمرین عملی نظری نبوده و از قوانین مثلثاتی در ایستایی و پایداری عناصر معماری که تا قبل از آن برخی از آن‌ها تخریب می‌شدند استفاده شده است.

کلیدواژه‌ها: مثلثات و معماری، معماری ایران، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، قضیه منلائوس

۱. مقدمه

مقاله چهارم رساله «مفتاح الحساب» کاشانی، طاق و ازج، از معدود رساله‌های نگاشته شده برای اصحاب معماری در باب هندسه اشکال کروی در عناصر معماری است. اشکال کروی از منظر اندیشمندان ایرانی همانند اشکال مستقیم‌الخط شناخته می‌شوند، با این تفاوت که اضلاع آنها کمان‌هایی از دایره عظیمه کوچکتر از نصف دایره هستند. میزان کارآمدی سه ضلعی و یا مثلث محیط بر این اشکال موضوعی است که برخی اندیشمندان پیش از غیاث‌الدین به بررسی آن پرداختند. این اندیشمندان نسبت‌ها و روابطی را در مؤلفه‌های این اشکال هندسی کشف کردند که قضایای هندسی مسطحه را روی اشکال کروی برقرار می‌ساخت. کاشانی در رساله «مفتاح الحساب» ضمن تکمیل این قضایا به تعمیم آن در صنعت معماری نیز پرداخت و راهکاری علمی در محاسبه و ترسیم برخی از عناصر معماری ارائه داد که منجر به پایداری در رفتار سازه‌ای این عناصر گردید.

خیام در ضمن بیان انتقادهای خود به کتاب اصول بر قضیه نسبت مؤلفه شدیداً تأکید کرد؛ زیرا شکل قطاع که پایه و مبنای حل مسائل علم هیئت و اشکال و مثلثات کروی است، بر اساس همین نسبت مؤلفه به دست می‌آید (بی‌نا، ۱۳۸۸: ۷۵). دانشمندان دوره اسلامی (قرن چهارم هجری و بعد از آن)، قضیه منلائوس^۲ را شکل القطاع^۳ نامیده‌اند (بی‌نا، ۱۳۸۸: ۲۰). یونانیان برای حل مثلثات کروی قضیه منلائوس را به کار می‌بردند و قضیه‌ای متشابه با قضیه منلائوس در هندسه مسطحه اثبات کردند (کندی، ۱۳۳۲: ۳۳۴-۳۳۵). دانشمندان ایرانی برای بیان قضیه منلائوس از مفهوم جیب^۴ (معادل سینوس امروزی)

استفاده می‌کردند اما منلائوس و دیگر دانشمندان یونان باستان این قضیه را به وسیله وتر دو برابر یک کمان^۵ بیان کرده‌اند (مهدوی، ۱۳۹۰: ۱۹). موضوع رساله «وتر و جیب» کاشانی به دست آوردن جیب یک درجه است. او در این رساله به تشکیل معادله جبری با استناد به قضایای هندسی و حل این معادله به روش تکرار پرداخته است. کاشانی برای ساخت این معادله جبری از قضیه بطلمیوس (چهارضلعی محاط در دایره) و تثلیث کمان استفاده نمود (قربانی، ۱۳۶۸؛ ۱۷۶). کتاب «اشکال الکریه» از جمله آثار منلائوس است که با استناد به گفته این ندیم، منلائوس پیش از بطلمیوس این کتاب را به رشته تحریر درآورده زیرا بطلمیوس در «مجسطی» از او یاد کرده است (امینی، ۱۳۹۲؛ ۳۲).

هدف مقاله چهارم رساله «مفتاح الحساب» کاشانی، ارائه راه‌کارهای علمی و محاسباتی طاق و ازج، گنبد و مقرنس برای صنعتگران است. عناصری که تا پیش از آن برخی شکسته می‌شدند. کاشانی در این رساله قوس‌های کمان‌ساز طاق و گنبد معماری را دسته‌بندی نمود و بر اساس اندازه هر دهانه قوسی را که از لحاظ ریاضی و معماری مناسب‌تر بود را پیشنهاد داد. میزان کارایی این رساله از «محاسبه سطح و حجم ساختمان» تا «رویکردی علمی از منظر ریاضیات به معماری» موضوعاتی است که همواره در میان پژوهشگران با اختلاف نظر همراه بود. از این رو سوال اصلی پژوهش، میزان انعکاس اندیشه‌های علمی کاشانی در عناصر معماری است. این پژوهش برای پاسخ به این پرسش از دو منظر، نخست تفسیر تاریخی و بررسی تکامل تدریجی آگاهی و ذهن اندیشمندان و دیگری، بازنمایی ریاضی و یا مدل‌سازی رایانه‌ای برای بررسی موضوع فوق بوده تا علوم تاریخی با نگاهی باورمند سازمان‌دهی شود.

گام نخست این پژوهش بررسی اهمیت رساله «مفتاح الحساب» در رویکردی علمی به صنعت ساخت و اجرای طاق و گنبد معماری است که با جستجوی ارتباط آخرین باب مقاله چهارم این رساله «طاق و ازج» با رساله دیگر کاشانی «وتر و جیب» همراه است. پژوهش در گام بعد بر سازگار ساختن گزاره‌های قاعده‌مند ریاضی، مستخرج از رساله‌های کاشانی، با نرم‌افزارهای محاسباتی رایانه‌ای تمرکز دارد و بر اساس منطق نحو (دستور زبان اشکال) طرح‌واره‌های کاشانی را تجزیه و تحلیل می‌نماید. بخش پایانی پژوهش با مد نظر قرار دادن قواعد ترسیمی و محاسباتی مطرح شده در رسائل کاشانی، چگونگی تأثیر اندیشه‌ها و ایده‌های کاشانی را در پدیدار شدن قواعد هندسی طاق و گنبد در دوران تیموری، مشخص خواهد نمود.

قواعد ریاضیاتی و محاسباتی در رساله «مفتاح الحساب» کاشانی الگویی هندسی تولید فرم در عناصر معماری است. از این رو، روش پژوهش بر پایه استدلال منطقی متکی بر گزاره‌های قاعده‌مند ریاضیات استوار است. ابزار ارتباط دهنده این قواعد، علوم محاسباتی موضوع رساله «وتر و جیب» با زبان اشکال موضوع رساله «طاق و ازج»، زبان برنامه‌نویسی پایتون در نرم‌افزار رایانه‌ای راینو می‌باشد. پایتون علاوه بر توابع محاسباتی، دارای پتانسیل شی‌گرایی و نحو است که با استفاده از افزونه گراس‌هاپر وارد نرم‌افزار سه بعدی راینو می‌شود. در این پژوهش، روش‌های اجرای قوس توصیف شده توسط کاشانی در مقاله چهارم رساله «مفتاح الحساب»، توسط زبان برنامه‌نویسی پایتون وارد فضای نرم‌افزاری راینو شده و میزان مطابقت قوس‌ها با علوم محاسباتی، موضوع رساله «وتر و جیب»، محاسبه می‌گردد. این روند، رویکرد علمی کاشانی از منظر ریاضیات در معماری را مشخص می‌سازد.

۲. پیشینه پژوهش

ترجمه و تحشیه رساله ارزشمند غیاث‌الدین جمشید کاشانی «طاق و ازج» (جدی، ۱۳۹۳ش)، آخرین باب مقاله چهارم «مفتاح الحساب»، برای مقاصد عملی مساحی بناها و عمارات نوشته شده است. ترسیمات کاشانی در این رساله مقطع اغلب قوس‌های کمان‌ساز طاق و ازج تا آن زمان را شامل می‌شود. یوشک‌ویچ و روزنفلد (۱۹۵۶م) نتیجه گرفته‌اند که کاشانی در «مفتاح الحساب» کلیه عمل‌های نجومی که در جدول‌های دیگر وجود نداشت را کشف کرده و تردیدی نیست که رساله «وتر و جیب» به تعیین ثلث زاویه اختصاص دارد و کاشانی این رساله را اختصاصاً برای دقیق‌تر کردن جدول‌های مثلثاتی نوشته است. توجه به دانش ریاضیات در معماری، روش‌های به کار رفته در رساله «طاق و ازج»، دلایل تألیف رساله، باب‌ها و مسائل آن پرسش‌هایی را درباره کاربرد هندسه مثلثاتی و ریاضیات در معماری مطرح می‌کند. از این رو به اختصار به روند تاریخی و تحولات ذهنی ریاضیدانان ایرانی پیش از کاشانی که بر ترسیم و تدقیق اشکال کروی تمرکز داشتند اشاره‌ای خواهیم داشت.

اوزدورال (۱۹۹۸) شکوفایی علوم ریاضی در معماری را مربوط به مجالس گفت و شنود میان برخی از ریاضی‌دانان بزرگ همانند ابوالوفا بوزجانی و اصحاب معماری دانسته و روشی را که ابوالوفا ارائه نمود، انعکاسی از ابتکارات او برای یافتن طریقی می‌داند تا بتواند قضیه‌ای نظری را به هنرورزانی که بالطبع با کارهای عملی سر و کار داشتند، تفهیم نماید نه

اینکه آنان را وادار کند تا کلیات ریاضیات آن عهد را فرا گیرند. با استناد به نتایج حاصل از پژوهش طاهری و ندیمی (۱۳۹۱) معماران پیش از ابوالوفا از دانش هندسه مرتب با حرفه خود بی‌بهره نبودند ولی تا پیش از او (قرن چهارم) در جهان اسلام، دانش مکتوب ریاضیات معماری آن‌گونه که او به تدقیق و عمومی کردن آن دست یافت، وجود نداشت. نتایج بررسی طاهری (۱۳۹۰)، طاهری و ندیمی (۱۳۹۱) به همراه پژوهشگرانی چون بلوم (Bloom) (۱۹۹۳)، هولد (Holod) (۱۹۸۸) و صلیبا (Saliba) (۱۹۹۹) نشان داد که کارآمدی رسائل بوزجانی برای اهل صنایع و ارتباط اصحاب معماری با متون ریاضی شفاهی است و ارتباط ناچیزی میان اصحاب این دو قلمرو وجود دارد. این موضوع بحث برانگیز در پژوهش‌های دیگر طیفی از آرا متفاوت داشته است. پژوهشگران دیگری چون بولاتوف (Bulatov)، چرباچی (Chorbachi) (۱۹۸۹)، اوزدورال (Ozdural) (۱۹۹۸)، نجیب اوغلو (Necipoglu) (۱۹۹۵) بر نقش علوم، متون ریاضی و ریاضی‌دانان در معماری دوران اسلامی تأکید دارند. اوزدورال (۲۰۰۰) با اشاره به پاره‌ای از مسائل مطرح شده در رسائل بوزجانی به این امر مهم دست یافته است که این طرح بعدها به کوشش عمر خیام جامه عمل به خود پوشید. اوزدورال در سال (۱۹۹۸) به یک سند مهم درباره حل یک مسئله هندسی توسط عمر خیام اشاره داشت. نتایج پژوهش وی نشان داد که خیام دو راه حل، مقاطع مخروطی و مثلث قائم‌الزاویه‌ای معروف به مثلث خیام، برای این مسئله ارائه داد. اوزدورال پس از توضیح و تحلیل خواص این مثلث و تناسبات گنبدخانه شمالی مسجد جامع اصفهان در خاتمه به این نتیجه رسید که «به نظر می‌رسد طرح هندسی گنبدخانه شمالی تماماً بر اساس مثلث خیام صورت گرفته است».

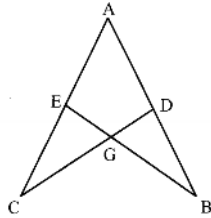
به طور کلی از دید پژوهشگران، دانش ریاضیات معماری در اواخر سده چهارم با تأثیر از فضای عقلانی فلاسفه و ریاضی‌دانان متولد شد. بوزجانی با تدقیق و تدوین مسائل هندسه عملی مورد نیاز صناعات، راهی متمایز در بی‌نیاز نمودن اصحاب معماری از ریاضی-دانان را آغاز نمود. طبق گفته اوزدورال این هدف با رویکرد مرزی خیام به ریاضیات تحقق یافت. این دانش‌ها در حدود سه قرن به تثبیت خود پرداختند اما نوآوری در آن‌ها وجود نداشت تا در قرن نهم بعد از حمله مغولان و آشفته‌گی ایران، غیاث‌الدین جمشید کاشانی دانشمند برجسته ریاضیات در عصر تیموری ظهور کرد. طاهری و نورتقانی (۱۳۹۰) با استناد به رساله «طاق و ازج»، کاشانی را دانشمندی با نگاه‌های دقیق به معماری و صناعات می‌دانند که برای اندازه‌گیری کلیه اشکال و احجام هندسی تقسیم‌بندی نسبتاً کاملی ارائه داده

است. نجیب اوغلو (۱۹۹۵) جداول محاسباتی از پیش آماده رساله کاشانی را بدون تأثیر در روند طراحی و تنها برای آسان نمودن محاسبات در کار معماران ذکر کرده است. خیری (۱۳۸۹) کاشانی را نخستین کسی می‌داند که ایستایی و رفتار سازه‌ای قوس‌ها را دسته‌بندی کرده و برای هر دهانه بر اساس اندازه آن قوسی را که از نظر ریاضی و معماری بهترین بوده پیشنهاد داد. سمپلونیوس (۲۰۰۰) صحت محاسبات مربوط به قوس‌ها در جداول رساله «مفتاح الحساب» را تا سه رقم اعشار ذکر نموده و جداول را برای تمام مقاصد علمی در آن عصر پاسخگو دانسته است.

با توجه به چنین آراء همسانی که همگی بر تأثیر رساله کاشانی بر معماری و صناعات تأکید دارند، هدف پژوهش حاضر کشف منطق ریاضی نهفته در لایه‌های پنهان معماری ایران در دوران تیموری است تا از این طریق به تبیین قواعد محاسباتی و ریاضیاتی که ریشه در معماری ایرانی دارد دست یابد. احیاء منطق مثلثاتی ریاضیات در معماری ایران راهکارهای قابل استناد و راهبردهایی ارائه می‌دهند که می‌تواند ادامه دهنده راه اندیشمندان ایران باشد.

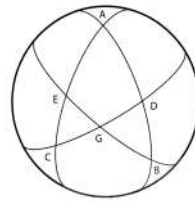
۳. قضیه منلائوس و قواعد محاسباتی ترسیمی اندیشمندان ایران

ریاضی‌دانان قرون دوم و سوم هجری روش یونانیان را برای حل مثلثات در علم هیأت به کار بردند، اما در قرن چهارم هجری عده‌ای از علماء ایرانی به جای قضیه منلائوس قضیاتی کشف کردند که از قضیه قبل ساده‌تر بود. در رأس این پیشگامان علم ابوالوفا بوزجانی قرار داشت (کندی، ۱۳۳۲: ۳۴۰).



$$\overline{DA} = \overline{GE} \cdot \overline{AC}$$

تصویر ۱. شکل قطاع مسطح و نسبت بین اضلاع آن

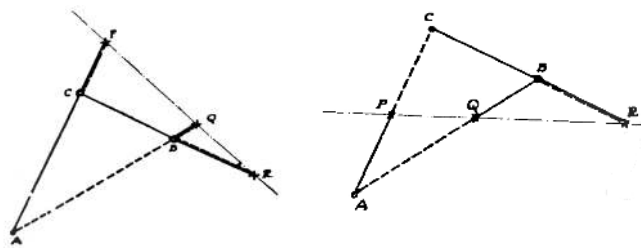


$$\overline{\sin DA} = \overline{\sin GE} \cdot \overline{\sin AC}$$

تصویر ۲. شکل قطاع کروی و نسبت بین کمان‌های آن

شکل قطاع در ریاضیات دوره اسلامی (قرن چهارم و بعد از آن) به دو چیز اطلاق می‌شد. اول؛ شکلی که از تقاطع چهار پاره‌خط (تصویر ۱)، یا چهار کمان از دایره عظیمه (تصویر ۲) روی سطح یک کره حاصل می‌شود و دوم نسبتی است که بین پاره‌خط‌ها یا کمان‌های این شکل برقرار است (مهدوی، ۱۳۹۰: ۱۸).

کار بدیع منلائوس برقراری تشابه میان اشکال مسطح و کروی است تا قضایا را روی سطح کره اثبات کند (امینی، ۱۳۹۲: ۳۶). روابطی که در تصاویر به آن‌ها اشاره شد نسبت مؤلفه نام دارد. در ریاضیات این دوران مفاهیم کسری به صورت امروزی وجود نداشت بلکه به جای محاسبه کسرها و کار با نسبت‌ها از نسبت مؤلفه استفاده می‌شد. در نسبت مؤلفه ارزش مکانی حائز اهمیت است از این رو جابجایی مقادیر آن مستلزم استفاده از قضایای دیگر بوده است.



تصویر ۳. نسبت مؤلفه در قضیه منلائوس

$$(AP \cdot BQ \cdot CR = AQ \cdot BR \cdot CP)$$

منلائوس برای انجام چنین کاری مقاله اول رساله خود را با قضایایی در مورد مثلث کروی تنظیم می کند چنانکه اقلیدس نیز مقاله اول اصول را برای مثلث های مسطحه تنظیم کرده بود (امینی، ۱۳۹۲: ۳۶). قضیه منلائوس (مقاله اول کتاب اشکال الکریه) را می توان اینگونه مطرح کرد که: هرگاه قاطعی (PQR) سه ضلع مثلث (ABC) را قطع کند هر ضلع بر دو قطعه (داخله یا خارجه) تقسیم می شود و از این شش قطعه حاصل ضرب آن سه خط که انتهای مشترک ندارند مساوی است با حاصل ضرب سه قطعه خط دیگر (تصویر ۳) (کندی، ۱۳۳۲: ۳۳۵). بدیهی است از جابجایی طرفین تساوی نسبت بین اضلاع و به طبع آن کمان ها مطابق آنچه علماء ایران بر اساس قوانین جبری کشف کرده اند حاصل می شود.

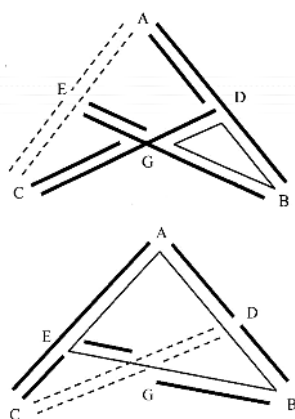
نصیرالدین طوسی نشان داد که تمام نسبت های مؤلفه ای را که می توان برای شکل القطار نوشت از دو نسبت مؤلفه به دست می آید:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BG}{GE} \cdot \frac{EC}{AC} \quad (۱)$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{EG} \cdot \frac{GC}{CD} \quad (۲)$$

وی دو نسبت یک (با استناد به تصویر ۳ سمت راست) و دو (با استناد به تصویر ۳ سمت چپ) را مطابق آنچه بطلمیوس ذکر کرده است به ترتیب تفصیل بطلمیوس و ترکیب بطلمیوس نامگذاری می کند و به طور مشابه نسبت ترکیب بطلمیوس برای حالت کروی (تصویر ۲) حاصل می شود (مهدوی، ۱۳۹۰: ۲۰). طبق تعریف، شکل قطاع مسطحه (تصویر ۴) از چهار خط (AB, BE, AC, CD) تشکیل شده است که دو به دو یکدیگر را در شش نقطه (A, B, C, D, E, G) قطع کرده اند. این چهار خط ارکان شکل قطاع هستند. بنا به تعریف نسبت مؤلفه از تلاقی یک مثلث و خط حاصل می شود. اگر در شکل دوم تصویر چهارم DGC را قاطع مثلث ABE بدانیم بنا بر قضیه منلائوس بین قاطع و مثلث نسبت $AC*GE*BD=DA*BG*EC$ برقرار است. از جابجایی طرفین تساوی طبق قوانین کشف شده علماء ایران در جبر و مقابله، نسبت بین اضلاع مطابق نسبت اول (تصویر اول) حاصل می شود و از تناظر زوایای مثلث کروی و مسطحه نسبت های مؤلفه به همین طریق قابل اثبات بر روی سطح کروی (تصویر ۲) می باشد. و اگر در شکل اول تصویر دوم AEC را قاطع مثلث BDG بدانیم بنا بر قضیه منلائوس بین مؤلفه های قاطع و مثلث نسبت $AB*EG*CD=AD*BE*GC$ برقرار است. از جابجایی طرفین تساوی طبق قوانین کشف

شده علماء ایران در جبر و مقابله، نسبت بین اضلاع طبق نسبت دوم مؤلفه نصیرالدین طوسی حاصل می‌شود. قانون دیگر قابل استنباط از قضیه منلائوس عدم مشارکت رکن قاطع و ارکان مثلث (ترسیم شده با خط‌چین و خط نازک در تصاویر چهار و پنج) در قضیه نسبت مؤلفه‌ها است.



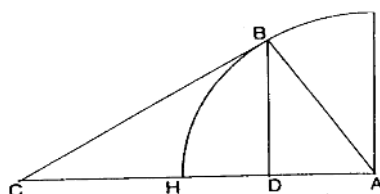
تصویر ۴. تفکیک شکل قطاع به قاطع و مثلث

اهمیت کار دانشمندان ایرانی (ابوالوفا، ابونصر و خجندی) ارتباط میان قوس‌ها و زوایای کروی با جیب (سینوس) و ضل (تانژانت) و سایر توابع مثلثاتی بود. پیشرفت دیگر آنان اثبات وجود رابطه بین زوایا و اضلاع هر مثلث کروی است (کندی، ۱۳۳۲: ۳۴۱). راه‌حل ابوالوفا برای اثبات قضیه فیثاغورث نه مانند خوارزمی بود و نه مانند اقلیدس. وی به خوبی می‌دانست که این راه‌حل‌ها برای هنرورزان آنچنان انتزاعی است که نمی‌توانند از آن‌ها سر درآورند. در عوض ابوالوفا با تکیه بر ابتکارات خود مبنی بر تضعیف مربع و تثلیث زاویه، قضیه مطلقاً انتزاعی و نظری را به هنرورزانی که بالطبع با کارهای عملی سر و کار دارند تفهیم کرد بدون آنکه آنان را وادار کند تا کلیات ریاضیات آن عهد را فرا گیرند. طبق شواهد موجود قضیه منلائوس سر آغاز آفرینش طرح‌های مورد بحث این پژوهش در آثار معماری شد. سند مهم دیگری که در همین رابطه در رساله اوزدورال به آن اشاره شد، رساله بدون عنوان فیلسوف و ریاضی‌دان مشهور ایرانی، عمر خیام است. راه‌حل واسط (مثلث خیام) روش دیگری برای درک بهتر هنرورزان از مسائل هندسی است. مثالی که خواص آن ذکر شد دارای نسبتی هارمونیک است. تعریف ریاضی از ارتباط درست بین اندازه، موضع و

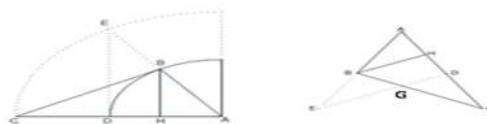
شکل اجزای گوناگون یک کل، تساوی نسبت‌ها است. حال باید دید این مقوله چگونه در مثلث خیام به کار رفته است.

۴. جایگاه مثلث خیام در علوم محاسباتی اندیشمندان ایران

اوزدورال معتقد است روش‌های ابوالوفا برای حل مسئله صنعتگران در شکست طاق‌ها ناکام ماند زیرا صرفاً به صنعتگران نشان می‌داد که چگونه می‌توانند مشکل را به روشی موجه حل نمایند. گرچه برتری ابوالوفا در ایجاد رابطه میان تئوری و عمل است اما دیدگاه‌های خیام در رابطه با عرف هندسه با اتکا به ادعاهای تئوری‌اش به عمل نزدیک بود (Ozden, 2015: 3). خیام با ذکر این موضوع که بیشتر مخاطبان او افرادی هستند که با کارهای عملی سر و کار دارند می‌کوشد تا روشی پیدا کند که در آن حتی‌المقدور از مقاطع مخروطی کمتر استفاده شود تا درک آن برای افراد غیر ریاضی‌دان آسان‌تر باشد (اوزدورال، ۱۹۹۸: ۱۹۵). این قواعد برای اهل تجربه و عمل ارائه گردید اما در نهایت قبل از به پایان رساندن آن، خیام دریافت که اصحاب صنایع در صورتی که مایل باشند خود این کار را انجام دهند به مقدماتی از اصول و مفاهیم مقاطع مخروطی نیاز دارند و به همین دلیل روش واسطه، روشی دوم خیام برای حل مسائل مطرح شده برای اصحاب صنایع بود.



تصویر ۵. مثلث خیام

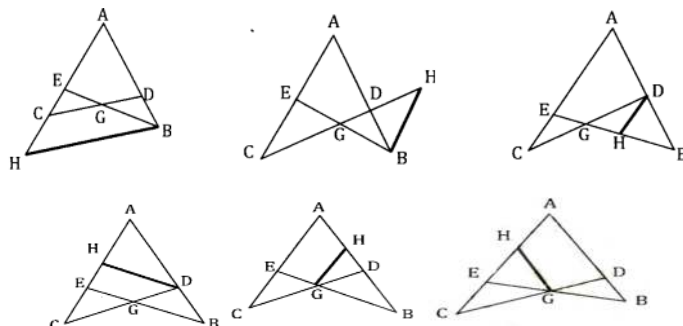


تصویر ۶. روند تبدیل مثلث خیام به قضیه منلائوس

تصویر ۷. برهان شکل قطاع در حالت مسطحه

عمر خيام اين مسئله را اينگونه مطرح ساخت: يك ربع دايره به مركز A را در نقطه B چنان تقسيم كنيم كه اگر خط BD عمود بر شعاع AH ترسيم شود $\frac{AH}{BD} = \frac{AD}{DH}$ ، گردد (تصوير ۵) (Ozdural, 1998: 701). خيام روش مرزی حل این مسئله را به شیوه‌ای دیگر مطرح کرد که منجر به معرفی مثلث خيام گردید (تصوير ۵). وی برای معرفی ساختار مثلث قائمه ABC، جمع عمود و ضلع کوچک این مثلث را برابر وتر قرار داد ($AC=AB+BD$)، و در رابطه‌ای دیگر ضلع میانه مثلث را برابر مجموع ضلع کوچکتر و AD قرار می‌دهد ($BC=AB+AD$) (اوزدن، ۲۰۱۵؛ ۵۳). آنگاه AD را برابر با مقدار دلخواه ۱۰ و BD را برابر با X فرض کرد و مسئله را به معادله درجه سوم $X^3+200X=20X^2+2000$ تبدیل کرد (Ozdural, 1998: 702). هرچند خيام برای استخراج این معادله از ترسیمات بسیار پیچیده‌ای بهره می‌برد، اما اثبات آن با توجه به قوانین محاسباتی و پایه مثلثاتی حال حاضر کار چندان پیچیده‌ای نیست. با استناد به روابط مثلثاتی می‌توان گفت که جواب حل این معادله نقطه است که می‌بایست تانژانت زاویه ۵۷ درجه باشد. این قوانین به همراه بسط و توسعه آن توسط کاشانی از جمله مباحثی است که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد.

جهت کشف این تناسب هارمونیک، مثلث ABC خيام را طوری بسط می‌دهیم که با مثلث متناظر و متساوی ADE شکل پایه و اولیه قضیه منلائوس حاصل شود (تصوير ۶). برای این منظور به مرکز A و شعاع AC کمانی رسم می‌کنیم تا در راستای AB نقطه E حاصل شود. اجزاء این دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر هستند. $AB=AD$ شعاع کمان کوچکتر، $AC=AE$ شعاع کمان بزرگتر و $A=A$ زاویه مشترک بین دو ضلع است. بنابراین دو مثلث برابر هستند و $ED=BC$ می‌باشد. با حذف خطوط کمان‌ها خطوط حاصله شیوه برهان شکل قطاع در حالت مسطحه خواهد شد (تصوير ۷). در این تصویر اگر ADE مثلث اصلی و BC قطاع باشد، از برخورد قطاع با مثلث اصلی مثلث دوم BGE به نام مثلث خشی حاصل می‌شود. در این برهان از یکی از اضلاع مثلث خشی (مثلاً B) خطی موازی یکی از ارکان مثلث اصلی (مثلاً BH) خارج می‌شود تا رکن دیگر مثلث را در نقطه H قطع گردد. از هر مثلث خشی به شش طریق می‌توان خطوط موازی ترسیم نمود (تصوير ۸).



تصویر ۸ شش روش برهان شکل قطاع، ABE مثلث اصلی، CD قاطع و BGD مثلث خشی

ترسیم این خطوط موازی مثلث‌های متشابه در حالت‌های مختلفی ایجاد می‌نمایند. در تصویر هشت با ترسیم خط موازی BH با رکن DE از نقطه B قوانین ذیل حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta ABH \sim \Delta AED &\Rightarrow \frac{BH}{ED} = \frac{AB}{AE} \\ \Delta CBH \sim \Delta CGD &\Rightarrow \frac{BH}{GD} = \frac{CB}{CG} \end{aligned}$$

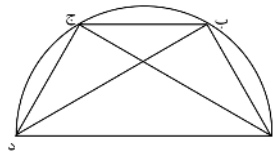
با حذف BH از طرفین تساوی بالا و ضرب آن‌ها در هم خواهیم داشت:

$$\frac{DE}{GB} = \frac{AE}{AB} * \frac{CG}{CB}$$

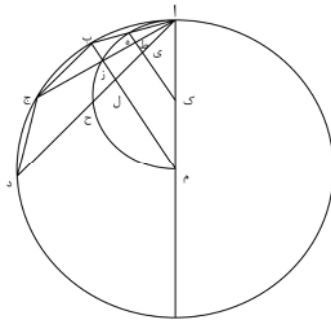
نسبت مؤلفه مستخرج شده از این شکل القطاع با نسبت مؤلفه قضیه منلائوس مطابقت دارد و این مهم استفاده خیام از مفاهیم جبری در راه‌حل مرزی برای تعیین نسبت مؤلفه‌های اضلاع و به دنبال آن راه‌حل واسط در تعیین زاویه را مشهود می‌سازد.

کاشانی برای محاسبه مساحت اشکال هندسی دیگر، نظیر مثلث متساوی‌الاضلاع و پنج تا شانزده ضلعی منتظم، اعدادی را حساب کرده تا برای محاسبه مساحت این اشکال مربع ضلع آن را در عدد مذکور ضرب کنند (کاشانی، بی تا؛ ۲۱). محاسبه وتر ثلث یک زاویه با استفاده از یک معادله جبری از جمله روش‌هایی است که توسط جمشید کاشانی برای حل مسئله تثلیث زاویه عرضه شده است. پس از او دیگر ریاضی‌دانان مانند قاضی زاده رومی رساله‌هایی بر مبنای این رساله کاشانی تألیف کردند. میرزا ابوتراب نطنزی ریاضی‌دان عصر قاجار نیز به این مسئله پرداخته است. روش او اساساً هندسی است و از لحاظ ریاضی با روش جبری جمشید کاشانی هم‌ارز است (دوست‌قرین، ۱۳۸۸: ۱). در بیان استخراج جیب یک درجه تألیف قاضی زاده رومی آمده است: «ذی‌اربعه‌الاضلاعی که در دایره‌ای واقع شود، مجموع مسطح ضلعین متقابلین او مساوی مسطح قطرین او است.» (تصویر ۹) (سوادی،

۱۳۸۷: ۷۷). در جایی دیگر ذکر شده؛ «دایرهٔ ا ب ج د به مرکز م رسم کنیم و هر یک از قوس‌های اب، ب ج، ج د به قدر دو^۱ درجه فصل کنیم و اوتار اب، ب ج، ج د، اد وصل کنیم و قطر ام اخراج کنیم و بر منصف ام، یعنی بر نقطهٔ ک، نصف دایرهٔ ام رسم کنیم. لامحاله اب، اج، اد را تنصیف کند بر نقطه‌های ه ز ح؛ به جهت آنکه اقطاری که از نقطهٔ م بر این نقطه‌های سه‌گانه می‌آید، عمود باشد بر هر یک از این اوتار سه‌گانه به شکل سی‌ام از مقالهٔ سیم» (تصویر ۱۰) (سوادی، ۱۳۸۷: ۷۸-۷۷).

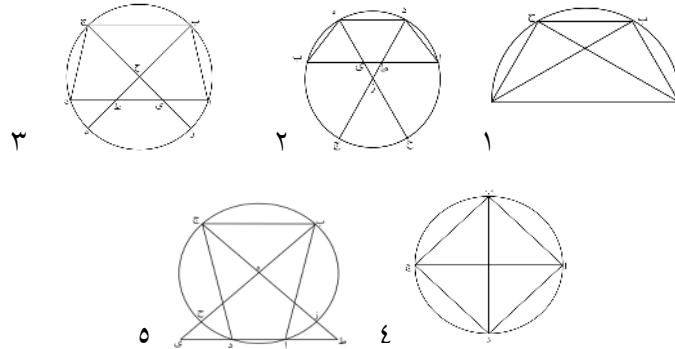


تصویر ۹: ذی اربعه‌الاضلاع



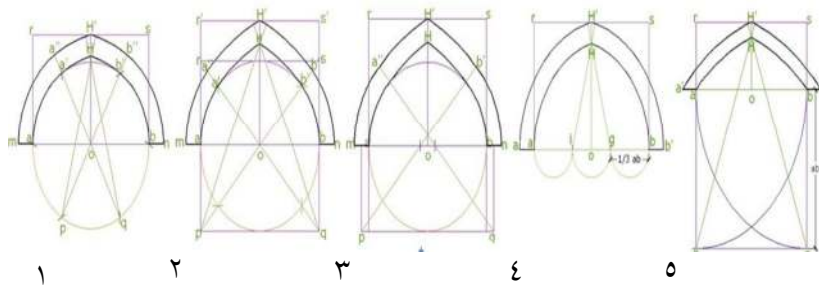
تصویر ۱۰: قطاع قائمه مستخرج از نقاط سه‌گانه

و به این صورت خطوطی قائمه از مرکز دایره بر این نقاط سه‌گانه فرود می‌آید. کاشانی با همین قواعد به محاسبهٔ جیب یک درجه دست یافت. وی در ابتدا ثابت کرد کمان‌های ایجاد شده بر دایرهٔ کوچکتر نصف کمان‌های ایجاد شده بر روی دایرهٔ بزرگتر هستند و با تکیه بر جیب سه درجه (ایجاد شده بر روی دایرهٔ کوچک) به محاسبهٔ جیب یک درجه نائل گشت. مثلثی شبیه به مثلث خیام اما با زاویهٔ ۶۰ درجه (مثلث خیام دارای زاویهٔ ۵۷ درجه بود) در ترسیمات کاشانی مشهود است. به نظر می‌رسد تثلیث زاویه تلاشی است برای به دست آوردن چندضلعی‌های منتظم و برای حل آن دانش مقاطع مخروطی لازم است. کاشانی جیب یک درجه را بر حسب جیب سه درجه از راه حل جبری و حل معادلهٔ درجهٔ سومی به صورت $aX=X^3+b$ محاسبه کرده است (دوست‌قرین، ۱۳۸۸: ۲۵).



تصویر ۱۱: پنج حالت تشریح هندسی تثلیث کمان توسط ابوتراب نظری

ابوتراب پس از تشریح روش کاشانی در تثلیث کمان روش خود را در پنج حالت مختلف (تصویر ۱۱) ذکر کرد. روش اثباتی برای سه حالت اول، سوم و پنجم یکسان و برای دو حالت دوم و چهارم بدیهی است (دوست‌قرین، ۱۳۸۸: ۲۶). در حالت اول طبق اثبات کاشانی؛ در هر چهارضلعی محاط در دایره، مجموع حاصل ضرب اضلاع مقابل برابر است با حاصل ضرب دو قطر (سوادی، ۱۳۸۷؛ ۹۶). در حالت دوم (شکل دوم تصویر ۱۲) قوس‌های BC ، CD و AB را برابر در نظر می‌گیریم، بنابراین وترهای مقابل به آن‌ها نیز با یکدیگر برابر هستند. همچنین قوس‌های رو به رو به زاویه مرکزی O نیز با هم برابرند در نتیجه زاویه CDA نصف قوس AC است و با زاویه COB برابر است (دوست‌قرین، ۱۳۸۸: ۲۷-۲۶).



تصویر ۱۲: پنج روش ترسیم قوس برگرفته از کتاب مفتاح الحساب کاشانی

شیوه ترسیم اشکال بی‌ارتباط با قواعد هندسی تثلیث کمان به نظر نمی‌رسد. نسبت مؤلفه‌ها از قرون سوم و چهارم به بعد همواره به عنوان برهانی اثباتی و کمی‌کننده ترسیمات هندسی مسائل بسیاری را مرتفع ساخت. بعد از آشنایی با مثلث خیام و ارتباط آن با قضیه منلائوس و تدقیق آن توسط کاشانی موارد استعمال آن‌ها را در معماری ایران جستجو خواهیم نمود. در ادامه به عناصر معماری اشاره خواهد شد که این قضایا در نظام-مند ساختن‌شان مؤثر بوده‌اند. بدیهی است که هدف این پژوهش دست یافتن به منطق ریاضی نهفته در این عناصر می‌باشد.

۵. قواعد محاسباتی و ترسیمی کاشانی در طاق و گنبد معماری

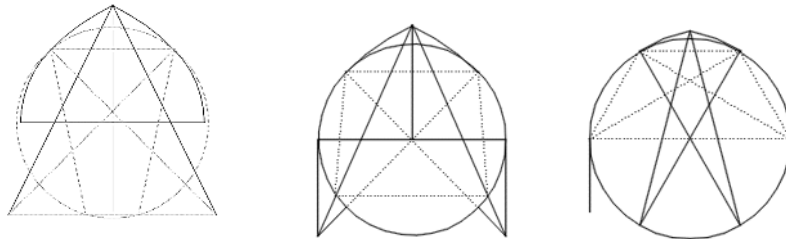
طرح‌های پیچیده هندسی که زینت‌بخش بناهای تاریخی ایران هستند به گونه‌ای پیوند خورده‌اند تا ترکیب‌های بی‌شماری را بر روی دیوارها و نقش و نگارهای دلفریب مقرنس‌ها به وجود آورند. علم ظریف هندسه نه تنها در تزئینات بلکه در ترکیبات هندسی سازه‌ای بنا از جمله گنبدها و قوس‌ها تأثیر چشم‌گیری داشت. البته به راحتی می‌توان چنین اظهار نظری را اغراق‌آمیز دانست و یا حتی رد کرد اما باید اذعان داشت، استدلالی که اساس رابطه مشترک بین تکامل هندسه و معماری را تشکیل می‌دهد می‌تواند نقیض این فرض باشد که معماران هنرورز فاقد هر گونه نبوغ هندسی بودند. یک پیوند آشکار میان هندسه و معماری، توصیف‌های غیاث‌الدین جمشید کاشانی در کتاب مفتاح الحساب راجع به مقرنس و مساحت سطح و حجم طاق، ازج و گنبدها است. در ادامه توصیف‌های مربوط به طاق و گنبد ذکر شده در معماری را با استناد به قواعد زبان اشکال در علوم محاسباتی تحلیل خواهیم نمود.

در تعریف غیاث‌الدین جمشید کاشانی قوسی که آن را قوس حقیقی (شکل دوم تصویر ۱۳) می‌نامد پوششی است که روی دو تکیه‌گاه که بین دو خط موازی واقع شده‌اند قرار می‌گیرد و سه روش ترسیمی اول^۷ از پنج بخش^۸ تشکیل یافته‌اند (دولد سمپلونیوس، ۲۰۰۷: ۶۳). کاشانی مبنایی را برای ترسیم طاق‌ها ارائه داده که می‌توان با تقسیم دایره به روش اول و دوم به عددهای دیگری دست یافت و همچنین تقسیمات دیگر قطر دایره در روش سوم و چهارم گونه‌های دیگر طاق را ترسیم نمود (تصویر ۱۲) (طاهری و نورقانی، ۱۳۹۰: ۱۲۴). کاشانی متذکر می‌شود که می‌توان کمان‌ها را حول نقاط دیگر بر روی خطوط داخل و خارج نیم‌دایره قرار داد اما محاسبات آن پیچیده‌تر خواهد شد (دولد سمپلونیوس، ۲۰۰۷:

۶۵). در سه روش اول این ترسیمات قواعد موجود در نسبت مؤلفه‌ها که بر پایه شکل - القطاع (قضیه منلائوس) شکل گرفته‌اند و فرم برش خورده لوزه در راس طاق به چشم می‌خورد، همچنین میزان تأثیر پنج حالت تشریح تثلیث کمان (تصویر ۱۱) کاشانی که توسط ابوتراب نطنزی هندسی گردید در ترسیم این کمان‌ها قابل ارزیابی به نظر می‌رسد. قوس‌ها در واقعیت تنوع بیشتری نسبت به پنج نوع معرفی شده توسط کاشانی دارند. قابل ذکر است کاشانی به مقاطع بیضی شکل برای قوس‌ها اشاره‌ای نکرده است. اگر قوس‌هایی غیر از پنج مدل ارائه شده مورد بررسی قرار گیرند بایستی نزدیک‌ترین مدل به قوس را اختیار کرد. گولومبیک و ویلبر از مقایسه قوس‌های کاشانی و قوس‌های واقعی دوران تیموری دریافتند که هدف کاشانی محاسبه سطح و حجم بوده است اما به دلیل نبود اطلاعات کافی در خصوص اجرای آن توسط معماران اظهار نظر نکرده‌اند، و به این معنی است که یک محاسبه ساده ما را به یک تقریب ظریف که هدف نهایی است رهنمون می‌سازد که با استناد به آن می‌توان این ترسیمات را توسط قواعد تثلیث کمان کاشانی به دیگر قوس‌ها تعمیم داد. به عنوان مثال علاوه بر نسبت مؤلفه‌هایی که در سه روش اول در ترسیمات کاشانی مشاهده می‌شود دو روش اول قابل انطباق با حالت اول و سوم تثلیث کمان است که خود توسط حالت پنجم بسط داده شده‌اند و روش سوم ترسیم قوس قابل انطباق با حالت پنجم تثلیث کمان است که طبق آنچه که قبلاً ذکر شد هندسه‌ای بدیهی ایجاد کرده‌اند. کاشانی کتاب مفتاح الحساب خود را با شرح مثلث و قواعد حاکم بر آن آغاز کرد و جهت ریاضی کردن عناصر معماری از همان قواعد بهره برده است. بنابراین وجود رابطه میان قوانین مثلثاتی و عناصر معماری امری بدیهی به نظر می‌رسد.

در بخش قبل سعی کردیم تا نشان دهیم که کاشانی چگونه با دقت، ضرایب قوس‌ها را محاسبه کرده است. دهانه هر قوس منشاء و اساس کلیه قوانین برای بدست آوردن ارزش نسبت‌ها به منظور قاعده‌مهندسازی مشخصات مشتق شده از هر پوسته است. در اینجا تعیین سه پارامتر اصلی نقاط مرکزی و موقعیت شکست بالای قوس ضروریست اما تجزیه و تحلیل طاق‌ها و گنبدها مستلزم شناخت قوس‌هایی است که با حرکت و دوران‌شان، این عناصر حاصل می‌شوند. برای تسهیل در ارائه و تنظیم یک ساز و کار هندسی، علاوه بر قضیه منلائوس سیستمی مبتنی بر پنج حالت هندسی تثلیث کمان که توسط ابوتراب نطنزی از دست‌نوشته‌های کاشانی تشریح شده است، پیشنهاد می‌گردد (تصویر ۱۳). در این مطابقت از اتصال نقاط تلاقی قوس‌ها و خطوط کمان ساز با یکدیگر حالت مختلف تثلیث

کمان استخراج شده است. این عملکرد به انعطاف‌پذیری تجزیه و تحلیل و تعریف قواعد هندسی تولید نمونه‌های متداول برای طاق و گنبد کمک کننده خواهد بود.



تصویر ۱۳. تطبیق قوس‌های مستخرج از کتاب مفتاح الحساب (خطوط ممتد) و اصول هندسی تثلیث کمان (خطوط منقطع)، تصاویر از سمت راست ۱. تطبیق قوس نوع اول و حالت اول تثلیث کمان ۲. تطبیق قوس نوع دوم و حالت سوم تثلیث کمان ۳. تطبیق قوس نوع سوم و حالت پنجم تثلیث کمان

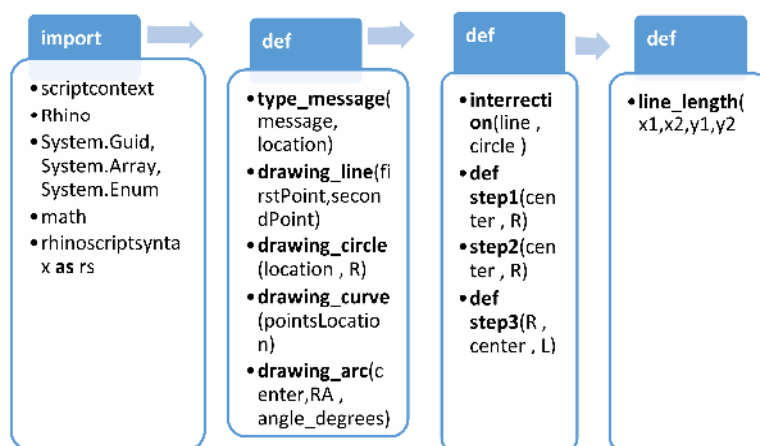
دو روش نخست کاشانی قوس‌های سه مرکزی را به وجود می‌آورد. در روش نخست، زاویه‌ای که دو قسمت قوس را تقسیم می‌کند ۶۰ درجه است. روش دوم مستلزم آن است که دایره را به هشت قسمت تقسیم کنیم تا نتیجه آن زاویه صاعد ۴۵ درجه باشد. اختلاف اساسی میان دو نوع طاق در انتخاب زاویه صاعد و قوس دوم قرار دارد (ویلیبر و همکاران، ۱۹۸۸: ۲۱۱). زاویه ۶۰ درجه برعکس زاویه ۴۵ درجه در پای طاق شیب‌دارتر و در نقطه راس کم عمق‌تر است. اگر مرکز دایره در قوس روش دوم بر روی پایه عمودی قرار گیرد راس طاق بلندتر و شیب‌دارتر خواهد شد. در مقایسه نمونه‌های واقعی طاق‌های تیموری با سرمشق‌هایی که کاشانی به توصیف آن پرداخته است، می‌خواهیم به این پرسش پاسخ دهیم. آیا عملیات ریاضیات در معماری را کاشانی درست مورد توجه قرار داده است یا رساله او فقط تمرین عملی و نظری بوده است؟

۶. ارزیابی سرمشق‌های کاشانی با زبان برنامه‌نویسی پایتون

بررسی مطالعات موجود نیازمند آزمون‌های مدل‌های فیزیکی است. از این رو سه روش اول اجرای قوس را که کاشانی در کتاب «مفتاح الحساب» به توصیف آن پرداخته است به وسیله زبان برنامه‌نویسی پایتون وارد فضای نرم‌افزاری راینو کرده و میزان مطابقت میان قوس‌های ترسیم شده با اصول هندسی تثلیث کمان را ارزیابی کردیم. در این روند تمرکز بر ترسیم

قوس‌ها دقیقاً بر اساس روش ترسیم در کتاب مفتاح‌الحساب بوده و در انتها اصول هندسی ذکر شده (تصویر ۱۳) در میان نقاط کلیدی این قوس‌ها ارزیابی شد.

زبان برنامه‌نویسی پایتون پتانسیل‌های جدیدی با قابلیت شی‌گرایی و نحو (دستور زبان اشکال) برای برنامه‌نویسی در نرم‌افزار راینو ارائه می‌دهد (Rutten, 2011: 1). اسکریپت‌ها در این برنامه، پرونده‌های متنی هستند که به طور هم‌زمان و برخط تفسیر می‌شوند. اسکریپت‌ها قابلیت کنترل دارند و این کنترل اسکریپت را قادر می‌سازد تا دستورالعمل خاصی را اجرا یا تکرار کند (Rutten, 2011: 3). از این، رو، در اسکریپت روش اول، ابتدا کدهای ترسیمی راینو و محاسبات ریاضیاتی فراخوانی (import) شدند و برای ساده کردن تماس به آن‌ها نام مستعار داده شد. این روند با اعلام توابع (def) اصلی ادامه یافت. تابع اول خلق آبجکت‌ها است و اگر آبجکت‌ها ایجاد نشوند برای جلوگیری از بروز خطا زیر روال‌ها متوقف می‌شوند. به دنبال تابع اول چهار تابع طبق توصیف کاشانی ترسیم خط (دهانه طاق)، ترسیم دایره به مرکز مشخص و به قطر دهانه طاق، تقسیم دایره و ترسیم کمان‌ها طبق ضوابط تعیین شد. در تابع آخر از نرم‌افزار خواسته شده چهارضلعی محاط بر دایره و قطرهای آن را (مطابق تصویر ۱۳) انتخاب و محاسبه کند که آیا طبق اصول هندسی تثلیث کمان، مجموع حاصل ضرب اضلاع مقابل برابر است با حاصل ضرب دو قطر، و در صورت مغایرت میزان خطا محاسبه شود. در اسکریپت روش دوم و سوم به دلیل پیچیدگی‌های موجود در روش ترسیم و انطباق طاق با قوانین تثلیث کمان، تابع دیگری (interrection) در سه مرحله (step) به توابع فوق اضافه گردید. در مرحله اول (def step 1) از نرم‌افزار خواسته شده تا برخی از کمان‌های و خطوط ترسیم شده در توابع پیشین را انتخاب نماید و در دو مرحله آخر (def step 2 & def step 3) از نرم‌افزار خواسته شده چهارضلعی محاط بر دایره و قطرهای آن را (مطابق تصویر ۱۳) انتخاب کند و بعد از آن محاسبات را انجام داده و میزان مغایرت را تعیین نماید (نمودار ۱). در این سه شیوه ترسیم میزان خطا به ترتیب صفر، ۰.۶۵ و ۱.۶۶ درصد اعلام شده است. به عبارت دیگر، در روش اول طاق مطابقت کامل با اصول هندسی تثلیث کمان را نشان داده است و در روش دوم و سوم به ترتیب مطابقت طاق با اصول هندسی تثلیث کمان دارای خطای نزدیک به نیم و یک و نیم درصد است.



نمودار ۱: اسکریپت ترسیم قوس با تشریح کاشانی (در زبان برنامه‌نویسی پایتون) و بررسی میزان انطباق آن با تنلیث کمان

به صورت نصف و یا قطعه‌ای از یک کره توخالی هستند. همچنین می‌توانند به شکل مخروط ضلع‌دار (هرم) و یا بر اساس شکلی که از چرخش یکی از انواع طاق‌ها حول محوری که از راس آن گذشته و به وسط قاعده آن عمود است، حاصل شوند (کاشانی، بی-تا؛ ۳۷). کاشانی در رساله‌اش به چهار نوع گنبد اشاره می‌کند. نیم‌کروی، بخشی از کره، یک مخروط چند وجهی و بالاخره گنبدی که از چرخش یک قوس پیرامون مرکزش بدست آمده باشد. هر یک از قوس‌ها و طاق‌ها را می‌توان حول مرکزش چرخاند (ویلبر و همکاران، ۱۹۸۸؛ ۲۱۷). از این رو مطالعات فوق قابل استناد و بررسی برای هر دو عنصر معماری طاق و گنبد خواهد بود.

۷. فلسفه تکنولوژی ساخت طاق و گنبد معماری در عصر تیموری

تکنولوژی پدیده‌ای است که همواره همراه انسان بوده و او را در دستیابی به مقاصدش یاری کرده است (بابایی، ۱۳۹۸؛ ۱). نظریه‌های علمی بر اساس قدرت تبیینی و شواهد تجربی ارزیابی می‌شوند و تایید آن‌ها مستقل از خواسته و اراده انسان‌ها است، در حالی‌که در تکنولوژی خواسته و اراده انسان دخیل است (پایا و منصوری، ۱۳۹۷؛ ۱۴۸). تکنولوژی ساخت طاق و گنبد معماری ایران در دوران تیموری با پیدایش قوس‌های کمان‌ساز متنوع،

بلند و تیزه‌دار همراه بود. غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضی‌دان عصر تیموری مقاله چهارم از رساله «مفتاح الحساب» را به محاسبه، ترسیم و اندازه‌گیری عناصر معماری اختصاص داده است. این رساله با مثلث و مسائل مربوط به آن آغاز می‌شود و در باب نهم از مقاله چهارم با بررسی و ارزیابی برخی از عناصر معماری پایان می‌پذیرد. کاشانی ذکر می‌نماید: «پیشینیان صرفاً درباره اندازه‌گیری طاق و قوس صحبت کرده‌اند و به مسائل مرتبط با آن نپرداخته‌اند. اما من این کار را کرده و برای آن روشی علمی ارائه داده‌ام که در اندازه‌گیری ساختمان‌ها به کار می‌رود». به نظر می‌رسد رویکرد علمی غیاث‌الدین در تثلیث زاویه و رساله «وتر و جیب» در دستیابی به تکنولوژی ساخت طاق و گنبد تیموری و قوس‌های مرتفع و تیزه‌دار مؤثر بوده است.

قوس‌های کمان‌ساز طاق و گنبد در تکنولوژی ساخت این عناصر نقش عمده‌ای دارند. قوس در تعریف هندسی خط و یا شکلی منحنی است و در اصطلاح معماری به باریکه طاقی که بین دو دیوار قرار دارد، اطلاق می‌شود. به عبارتی دیگر به کمانی که طاق از لحاظ شکلی تابع آن است، قوس گفته می‌شود. ازج^۹ واژه‌ای عربی است و غیاث‌الدین این واژه را برای طاق به کار برد. قوس‌ها در دوران قبل از اسلام و حتی تا قرون اولیه بعد از اسلام در ایران غالباً مازه‌دار هستند اما به تدریج پوشش‌های تیزه‌دار جای آن را گرفت. در قوس مازه-دار رأس هلالی شکل و یا بخشی از بیضی است و رأس قوس تیزه‌دار تیز است و از تقاطع حداقل دو قوس منحنی ایجاد می‌شود. از عمده‌ترین دلایل جایگزینی قوس تیزه‌دار مرتفع-تر نشان دادن بنا در مقایسه با قوس مازه‌دار است. ساخت طاق‌ها و گنبد‌های بلند با تحمل نیروهای فشاری بیشتر گواه آشنایی ایرانیان با ضوابط ترسیم قوس از لحاظ ریاضی و هندسی است.

۸. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

تقسیم کره توسط دوایر عظیمه مطابق قضیه منلائوس و رسم اشکال ساده بر سطح آن توسط بوزجانی در باب انتهایی رساله‌اش آغاز شده است. وی در این باب شرح داد که چگونه با ترسیم این دوایر بر سطح کره می‌توان کره را به قسمت‌های مساوی تقسیم کرد و در ادامه این تقسیمات را به ترسیمات اشکال متفاوت بر سطح کره مرتبط ساخت. در قرون بعد، خیام و پس از آن کاشانی از جمله ریاضی‌دانانی بودند که آثار به جا مانده از آنان قابل تحلیل و تطبیق با مفاهیم هندسه کاربردی مرتبط با معماری است که بوزجانی در رساله

خود در تبیین آن اهتمام ورزیده بود. تضعیف مربع و تثلیث زاویه راه‌حل‌هایی هستند که ابوالوفا در کتاب اعمال هندسی خود مطرح نموده است. موارد ذکر شده از جمله مباحثی بودند که ذهن ریاضی‌دان‌ها را بسیار به خود مشغول کرده و حاصل آن کشف مقاطع مخروطی بود که تاثیر بسزایی در جهش و پیشرفت بسیاری از علوم و معماری داشت.

روش‌های ابوالوفا برای حل مسئله صنعتگران در شکست طاق‌ها ناکام ماند و فقط به صنعتگران نشان داد که چگونه می‌توانند مشکل را به روشی موجه حل نمایند. برتری شاخص ابوالوفا در ایجاد رابطه میان تئوری و عمل است، اما دیدگاه خیام در رابطه با عرف هندسه با اتکا به تئوری‌اش به عمل نزدیک شد و خیام در تشریح مثلث خود کوشید تا روشی پیدا کند که در آن حتی المقدور از مقاطع مخروطی کمتر استفاده شود تا درک آن برای افراد غیر ریاضی‌دان آسان‌تر باشد. روش خیام برای اهل تجربه و عمل ارائه گردید اما در نهایت خیام دریافت که اصحاب صنایع در صورتی که مایل باشند خود این کار را انجام دهند به مقدماتی از اصول و مفاهیم مقاطع مخروطی نیاز دارند و به همین دلیل روش واسط روشی دوم خیام برای حل مسائل مطرح شده از جانب اصحاب صنایع بود. استفاده از مثلث خیام و شیوه ترسیم آن به یک معادله درجه سوم منجر گردید که خیام با استفاده از مقاطع مخروطی به حل آن فائق آمد. نقوش ترسیمی که در آن‌ها از مثلث خیام استفاده می‌شود به اشکال دیگری منجر می‌گردد که در اشکال مستخرج شده توسط ریاضی‌دانان قرن نهم، غیاث‌الدین جمشید کاشانی بررسی گردید. محاسبات هندسی این اشکال توسط کاشانی بسط داده شد و در نهایت تکمیل گردید.

کاشانی رساله «مفتاح الحساب» را با مثلث و مسائل مربوط به آن آغاز و در محاسبه جیب یک درجه از مثلثی شبیه به مثلث خیام (مثلث قائم‌الزاویه ۵۷ و ۳۳ درجه) استفاده کرد، با این تفاوت که او هر جیب را معادل یک واحد در حساب شصتگانی محاسبه کرد. مثلث کاشانی برای محاسبه جیب یک درجه در حساب شصتگانی برابر با مثلث قائم‌الزاویه ۶۰ و ۳۰ بود. ثابت ابن قره و به دنبال آن ابوالوفا بوزجانی در تضعیف مربع و تثلیث زاویه از مثلث‌های قائم‌الزاویه با همین نسبت (نسبت اضلاع یک به دو) استفاده کرده اند. کاشانی بر اساس تجربیات خود در ایستایی و رفتار سازه‌های قوس‌ها که تا قبل از آن برخی از آن‌ها شکسته می‌شدند. این قوس‌ها را طراحی و ترسیم کرده است. او قوسی که از نظر ریاضی و معماری کاربردی است را پیشنهاد داد و قوس دوم را (دارای نیم درصد خطا نسبت به حالت ایده‌آل اصول هندسی است) قوس حقیقی در معماری دانسته و روش دیگری را

برای خیز بیشتر مطرح کرد که بر اساس اصول هندسی استوار است. از نظر پژوهشگر کاشانی قواعد مثلثاتی ریاضیات در معماری را به درستی مورد توجه قرار داده است و این تمرین عملی و نظری نبوده است. او با علم به وجود میزان خطا که به معنای خروج از تثلیث کمان با خطایی نزدیک به یک درصد (قابل اغماض در علم آمار) است قوس‌های مناسبی را از نظر معماری و ریاضیاتی پیشنهاد داده است و گواه آن قوس نوع اول با تقسیم دایره تحت زاویه شصت درجه می‌باشد که دارای خطای صفر درصد است.

پی‌نوشت‌ها

۱. تاریخ تولد کاشانی به طور دقیق در منابع نیامده است. ابوالقاسم قربانی در «کاشانی‌نامه» با استناد به برخی از فرائین تاریخ تولد کاشانی را در حدود ۷۹۰ ق. می‌داند. وی تاریخ درگذشت غیاث‌الدین را نوزدهم رمضان ۸۳۲ ق. ذکر کرده است.
۲. منلائوس اسکندرانی دانشمند یونان باستان، قضیه اول مقاله سوم از کتاب الاشکال‌الکریه وی به قضیه منلائوس معروف است که به چهار کمان متقاطع از دایره‌های عظیمه روی سطح کره بیان می‌شود.
۳. منلائوس در مقاله سوم کتاب خود قضیه‌ای را بیان و اثبات می‌کند که تا پیش از قضیه ابداع سینوس‌ها در قرن چهارم هجری، تمام محاسبات مربوط به کمان‌های روی کره با استفاده از آن انجام می‌شد. این قضیه امروز به نام خود منلائوس معروف است و در دوره اسلامی (قرن چهارم و بعد از آن) شکل‌القطاع نامیده شد. این قضیه در مجسطی بطلمیوس در هر دو حالت مسطح و کروی ذکر شده است.
۴. از نظر دانشمندان دوره اسلامی جیب از جنس طول بود اما سینوس امروزه به صورت نسبت تعریف می‌شود. جیب یک کمان معادل حاصلضرب شعاع دایره مفروض و سینوس آن کمان است. در گذشته برای کسینوس یک کمان یا زاویه لفظ جیب تمام یعنی جیب متمم آن کمان یا زاویه استعمال می‌شد.
۵. به جای کلیه توابع مثلثاتی کنونی یونانی‌ها فقط یک تابع به کار می‌بردند که آن را تابع وتر می‌نامند. و علامت اختصاری آن crd است و تعریف این تابع این است که اگر هر عدد مفروضی مانند X را مقدار درجه زاویه مرکزی قرار بدهیم به طوری که شعاع دایره مربوطه مساوی شصت باشد وتر آن زاویه مرکزی $\text{crd}X$ می‌شود.
۶. از دید پژوهشگر این رقم بر مبنای اعداد شصتگانی نوشته شده و هر واحد برابر شصت است.

۷. اولین نوع برای دهانه‌های کمتر از پنج ذراع، نوع دوم برای پنج، ده و حداکثر پانزده ذراع و نوع سوم برای دهانه‌های بزرگتر از ده باع بسیار مناسب است.
۸. دو بخش از یک استوانه یا حلقه یا شکل طبل با قطری کوچکتر یا مساوی دهانه بر روی دو تکیه‌گاه، دو بخش دیگر از یک استوانه یا حلقه یا شکل طبل با قطری بزرگتر از اولی با ارتفاع برابر بر روی راس دو بخش اول، قطعه‌ای به شکل لوزی که قوس‌ها را به هم متصل می‌کند. در روش چهارم قوس تنها دو قطعه استوانه‌ای همراه با سنگ بالای طاق تشکیل شده و در روش پنجم تنها شامل دو بخش استوانه‌ای است.
۹. فرق طاق و ازج در نسبت عرض و یا همان عمق به دهانه آن‌ها است. عرض طاق بیشتر از دهانه آن نیست ولی در ازج ممکن است بیشتر و گاهی به اندازه عرض آن باشد.

کتاب‌نامه

- امینی، حسن. (۱۳۹۲). تعبیر کروی هندسه مسطحه در بخش هندسی الاشکال الکریه منلائوس، تاریخ علم، ۱۴، ۴۴: ۳۱-۴۶.
- اوزدورال، آلبای. (۱۹۹۸)، عمر خیام و معماری، ترجمه: ناصر کنعانی. (۱۳۸۰). فرهنگ، ۳۹ و ۴۰، صص ۱۸۹-۲۵۲.
- بابایی، سعیده. (۱۳۹۸). فلسفه تکنولوژی بورگمان: مروری انتقادی، فلسفه علم، ۹: ۲، صص: ۱-۳۳.
- بی‌نا، (۱۳۸۸). رساله فی شرح ما أشکل من مصادرات کتاب اصول اقلیدس، کتاب ماه علوم و فنون، ۱۱۸، صص: ۶۰-۷۷.
- پایا، علی. منصوری، علی‌رضا. (۱۳۹۷). علم و تکنولوژی: تفاوت‌ها، تعامل‌ها، و تبعات آن‌ها، فلسفه علم، ۸: ۲، صص: ۱۳۱-۱۵۸.
- خیری، علی. (۱۳۸۹). قوس معماری ایرانی اسلامی در «مفتاح الحساب» غیاث‌الدین جمشید کاشانی، کتاب ماه علوم و فنون، (۱۲۹)، ۲، صص: ۲۸-۳۴.
- دوست‌قرین، فاطمه. (۱۳۸۸). رساله میرزا ابوتراب نطنزی در تثلیث زاویه، تاریخ علم، ۸، صص: ۱-۲۹.
- سمپلونیوس، ایوونه دولد. (۲۰۰۰). روش کاشانی برای محاسبه قوس‌ها، ترجمه: علیرضا اشرفی و محمدرضا احمدی، (۱۳۸۴)، آینه میراث ویژه تاریخ علم، ۳: ۲۸، صص: ۶۱-۷۷.
- سوادی، فاطمه. (۱۳۸۷). رساله‌ای فارسی درباره محاسبه جیب یک درجه، تاریخ علم، ۶، صص: ۱-۱۰۴-۶۹.
- طاهری، جعفر. (۱۳۹۰). نقد بر تحقیق و تصحیح «ترجمه کتاب النجاره» بوزجانی، کتاب ماه علوم و فنون، شماره ۵۳، صص: ۳-۹.

- طاهری، جعفر و ندیمی، هادی. (۱۳۹۱). بازخوانی میراث ابوالوفا بوزجانی در صناعات معماری، تاریخ علم، ۱۳، صص: ۶۵-۹۱.
- طاهری، جعفر و نورتقانی، عبدالحمید. (۱۳۹۰). دانش ریاضیات معماری در آثار کاشانی، کتاب ماه علوم و فنون، ۲(۵۲)، صص: ۱۳۰-۱۲۱.
- قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۳۸). کاشانی نامه: احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی، چاپ دوم، تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
- کاشانی، غیاث‌الدین جمشید. (بی‌تا). رساله طاق و ازج، ترجمه: سید علیرضا جذبی، (۱۳۹۳). چاپ سوم، تهران: انتشارات سروش.
- کندی، ای. اس. (۱۳۳۲). نکته‌هایی درباره هیأت اسلامی، علوم اجتماعی: فرهنگ ایران زمین، ۱، صص: ۲۹۱-۳۴۶.
- مهدوی، یونس. (۱۳۹۰). قضیه منلائوس در کتاب کشف القناع، کتاب ماه علوم و فنون. (۱۳۸) ۵:۲، صص: ۱۶-۲۹.
- نجیب اغلو، گل‌رو. (۱۹۹۵). هندسه و تزئین در معماری اسلامی (طومار تویقایی)، ترجمه: مهرداد قیومی بید هندی. (۱۳۹۷). چاپ سوم، تهران: روزنه‌کار.
- ویلبر، دونالد و همکاران. (۱۹۸۸). معماری تیموری در ایران و توران، ترجمه: کرامت‌الله افسر و محمد یوسف کیانی، (۱۳۷۴)، چاپ اول، تهران: سازمان میراث فرهنگی کشور.
- یوشکه‌ویچ، آدولف. روزنفلد، بوریس. (۱۹۵۶). غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ترجمه: پرویز شهریاری، (۱۳۵۸)، ماهنامه علمی و فرهنگی هدهد، ۲: ۱، صص: ۸-۱۶.

Ozden, Denise. (2015). THEORY AND PRACTICE OF GEOMETRY IN MEDIEVAL ARCHITECTURE IN THE MIDDLE EAST (10th-14th CENTURIES), A THESIS SUBMITTED TO THE GRADUATE SCHOOL OF SOCIAL SCIENCES OF MIDDLE EAST TECHNICAL UNIVERSITY, etd.lib.metu.edu.tr, retrieved: 08/2019.

Ozdural, Alp. (1998). A Mathematical Sonata for Architecture: Omar Khayyam and the Friday Mosque of Isfahan, Technology and Culture, Vol. 39, No. 4, PP: 699-715.

Ozdural, Alp. (2000). Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World, Historia Mathematica, Vol. 27, No. 2, pp: 171-201

Rutten, David. (2011). Python for Rhinoceros 5, Rhinocervs, Revision 3, http://designalyze.com/sites/default/files/tutorial_files/RhinoPythonPrimerRev3.pdf, retrieved: 01/2020. \